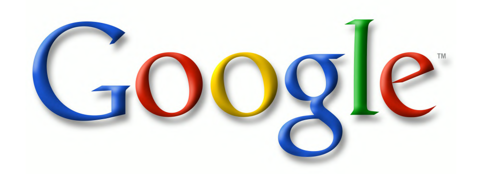






REPETITORIUM DER HÖHEREN MATHEMATIK

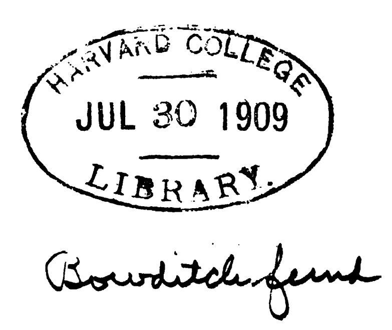
(LEHRSÄTZE · FORMELN · TABELLEN)

VON

DR. ING. DR. PHIL. HEINZ EGERER
DIPLOM-INGENIEUR



MÜNCHEN UND BERLIN
VERLAG VON R. OLDENBURG
1908


HARVARD COLLEGE
JUL 30 1909
LIBRARY.

Vorwort.

In seiner Gestaltung entstanden als Resultat vom Verfasser seit Jahren geleiteter Vorbereitungskurse für das Ingenieur-Hochschulexamen, wendet sich die vorliegende Sammlung in erster Linie an diejenigen Berufe, denen die höhere Mathematik eine Hilfswissenschaft ist. Vor allem wurde kurze und präzise Fassung der Definitionen und Lehrsätze berücksichtigt; wenn auch noch die für Studierende zumal wünschenswerte Übersicht erzielt ist, so ist das erreicht, was der Verfasser anstrebte.

München, Ostern 1908.

H. Egerer.

Inhaltsverzeichnis.

Berichtigungen.

S. 23 Zeile 6 v. u. lies $\sqrt[r]{a} : \sqrt[r]{b}$,

„ 44 „ 1 „ „ $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$,

„ 48 „ 2 „ „ $\cos\varphi + i\sin\varphi$,

„ 91 „ 11 „ „ $\int_a^b f(x)\,dx$,

„ 151 „ 5 „ „ $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$.

I. Längen-, Flächen- und Volumenberechnungen.

§ 1. Dreieck und Vieleck.

1. F Fläche, D bezw. D_1, D_2 Diagonalen, δ der zwischen ihnen liegende Winkel, a, b, c, d Seiten; beim regulären Vieleck ist a die Seite, r der Radius des umschriebenen, ϱ der des eingeschriebenen Kreises.

2. **Reguläres Dreieck.**

$$a = {}^2/_3\, h \sqrt{3} = r \sqrt{3} = 2 \varrho \sqrt{3};$$
$$h = {}^1/_2\, a \sqrt{3} = {}^3/_2\, r = 3 \varrho;$$
$$F = {}^1/_4\, a^2 \sqrt{3} = {}^1/_3\, h^2 \sqrt{3} = {}^3/_4\, r^2 \sqrt{3} = 3 \varrho^2 \sqrt{3}.$$

3. **Gewöhnliches Dreieck** (siehe § 11).

4. **Quadrat.**

$$a = r \sqrt{2} = 2 \varrho = {}^1/_2\, D \sqrt{2};$$
$$D = a \sqrt{2} = 2 r = 2 \varrho \sqrt{2};$$
$$F = a^2 = 2 r^2 = 4 \varrho^2 = {}^1/_2\, D^2.$$

5. **Rechteck.**

$$D^2 = a^2 + b^2;$$
$$F = a b = {}^1/_2\, D^2 \sin \delta.$$

6. **Rhombus.**

$$D_1^2 + D_2^2 = 4 a^2;$$
$$F = {}^1/_2\, D_1 D_2 = a^2 \sin \gamma;$$

γ Rhombuswinkel.

7. **Parallelogramm.**

$$D_1^2 + D_2^2 = 2 (a^2 + b^2);$$
$$F = b h = a b \sin \gamma = {}^1/_2\, D_1 D_2 \sin \delta;$$

h Höhe auf b, γ Winkel zwischen a und b.

8. **Trapez.**

$$F = \tfrac{1}{2}(a + b)h = \tfrac{1}{2} D_1 D_2 \sin\delta;$$

a und b die parallelen Seiten, h ihr Abstand.

9. **Kreisviereck.**

$$D_1 D_2 = ac + bd;$$

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)};$$

wenn $2s = a + b + c + d$.

10. **Gewöhnliches Viereck.**

$$F = \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2) D_1 = \tfrac{1}{2} D_1 D_2 \sin\delta;$$

h_1 und h_2 die Höhen auf D_1 von den Ecken aus.

11. **Reguläres Fünfeck.**

$$a = \tfrac{2}{5} h \sqrt{25 - 10\sqrt{5}} = \tfrac{1}{2} r \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 2\varrho \sqrt{5 - 2\sqrt{5}};$$

$$h = \tfrac{1}{2} a \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \tfrac{1}{4} r (5 + \sqrt{5}) = \varrho \sqrt{5};$$

$$D = \tfrac{1}{2} a (\sqrt{5} + 1) = \tfrac{1}{5} h \sqrt{50 - 10\sqrt{5}} = \tfrac{1}{2} r \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \varrho \sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

$$F = \tfrac{1}{4} a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = h^2 \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} = \tfrac{5}{8} r^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 5\varrho^2 \sqrt{5 - 2\sqrt{5}};$$

h die Höhe von einem Eckpunkt auf die symmetrisch gelegene Gegenseite.

12. **Reguläres Sechseck.**

$$a = r = \tfrac{2}{3} \varrho \sqrt{3}; \quad \varrho = \tfrac{1}{2} a \sqrt{3} = \tfrac{1}{2} r \sqrt{3};$$

$$D_1 = 2a = 2r = \tfrac{4}{3} \varrho \sqrt{3}; \quad D_2 = a\sqrt{3} = 2\varrho;$$

$$F = \tfrac{3}{2} a^2 \sqrt{3} = \tfrac{3}{2} r^2 \sqrt{3} = 2\varrho^2 \sqrt{3}.$$

13. **Reguläres Achteck.**

$$a = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2\varrho(\sqrt{2} - 1);$$

$$D_1 = 2r,\ D_2 = 2\varrho,\ D_3 = r\sqrt{2};$$

$$F = 2a^2(\sqrt{2} + 1) = 2r^2\sqrt{2} = 8\varrho^2(\sqrt{2} - 1).$$

14. **Reguläres Zehneck.**

$$a = \tfrac{1}{2} r (\sqrt{5} - 1) = \tfrac{2}{5} \varrho \sqrt{25 - 10\sqrt{5}};$$

$$F = \tfrac{5}{2} a^2 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \tfrac{5}{4} r^2 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 2\varrho^2 \sqrt{25 - 10\sqrt{5}}.$$

15. **Reguläres n-Eck** (siehe auch § 11).

$$a = 2\sqrt{r^2 - \varrho^2} = 2r\sin\frac{\pi}{n} = 2\varrho\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n};$$

$$F = {}^1/_4\, n a^2 \mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{n} = {}^1/_2\, n r^2 \sin\frac{2\pi}{n} = n\varrho^2\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}.$$

16. **Beliebiges Vieleck.**
Bestimmung des Flächeninhaltes durch Zerlegung in Dreiecke oder mit Zuhilfenahme eines rechtwinkligen Koordinatensystems (§ 66).

§ 2. Krummlinig begrenzte Flächen.

1. **Kreis.**
Umfang $U = 2r\pi = d\pi$; $\quad F = r^2\pi = {}^1/_4\, d^2\pi$.

2. **Kreissektor (= Kreisausschnitt).** Wenn der zum Bogen b gehörige Zentriwinkel α im Bogenmaß $\mathrm{arc}\,\alpha = \alpha\,\frac{\pi}{180}$ ist, so ist $b = r\cdot\alpha\,\frac{\pi}{180}$ (Bogen gleich Radius mal Zentriwinkel);

$$F = {}^1/_2\, br = {}^1/_2\, r^2\,\mathrm{arc}\,\alpha = {}^1/_2\, r^2\frac{\alpha\pi}{180}.$$

3. **Kreissegment (= Kreisabschnitt).** Wenn α der Zentriwinkel in Grad, also $\mathrm{arc}\,\alpha = \alpha\,\frac{\pi}{180}$, so ist

$$F = {}^1/_2\, r^2\,(\mathrm{arc}\,\alpha - \sin\alpha).$$

4. **Kreisring.**

$$F = \pi\,(R^2 - r^2) = {}^1/_4\,\pi\,(D^2 - d^2) = 2\pi\varrho\,\delta;$$

R und r großer und kleiner, ϱ mittlerer Radius, D und d Durchmesser, $\delta = R - r$.

5. **Kreisringstück.**

$$F = {}^1/_2\,(R^2 - r^2)\,\mathrm{arc}\,\alpha = \varrho\,\delta\,\mathrm{arc}\,\alpha;$$

(Bezeichnung wie 2. und 4.)

6. Bogenlängen und Flächen von **Kegelschnitten** und anderen Kurven siehe § 74, § 75 und Kurvendiskussion.

7. **Beliebige Fläche** (siehe § 62).

§ 3. Körper.

V Volumen, O Oberfläche, G Grundfläche, M Mantelfläche, a, b, c ...... Kanten, D, D_1 ...... Diagonalen, h Höhe, r und ϱ die Radien der umschriebenen, bezw. eingeschriebenen Kugel.

1. **Würfel.**

$$a = \tfrac{2}{3} r \sqrt{3} = 2\varrho;$$
$$D = a\sqrt{3} = 2r = 2\varrho\sqrt{3};$$
$$O = 6a^2; \quad V = a^3.$$

2. **Quader.**

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2;$$
$$O = 2(ab + bc + ca); \quad V = abc.$$

3. **Prisma.**

$$V = Gh.$$

4. **Schief abgeschnittenes Prisma** (an beiden Enden).

a) dreiseitig. $V = \tfrac{1}{3} Q(a + b + c)$;

Q der zu den parallelen Kanten a, b, c vertikale Querschnitt.

b) n-seitig. $V = Ql$;

l die Verbindungsstrecke der Endflächenschwerpunkte, Q der zu l vertikale Querschnitt.

5. **Pyramide.**

$$V = \tfrac{1}{3} Gh.$$

6. **Pyramidenstumpf.**

$$V = \tfrac{1}{3} h \left(G + g + \sqrt{Gg}\right);$$

g obere Deckfläche.

7. **Keil.**

$$V = \tfrac{1}{6} hb(2a + c);$$

ab Fläche des rechteckigen Keilrückens, c die zur Kante a parallele Schneidkante, h deren Entfernung vom Keilrücken.

8. **Reguläres Tetraeder.**

$$a = \tfrac{2}{3} r\sqrt{6} = 2\varrho\sqrt{6};$$
$$O = a^2\sqrt{3}; \quad V = \tfrac{1}{12} a^3 \sqrt{2}.$$

9. **Beliebiges Tetraeder.** § 106.

10. **Reguläres Oktaeder.**

$$a = r\sqrt{2} = \varrho\sqrt{6};$$
$$O = 2a^2\sqrt{3}; \quad V = {}^1/_3\, a^3\sqrt{2}.$$

11. **Reguläres Dodekaeder.**

$$a = {}^1/_3\, r\sqrt{3}\,(\sqrt{5} - 1) = \varrho\sqrt{50 - 22\sqrt{5}};$$
$$O = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}};$$
$$V = {}^1/_4\, a^3\,(15 + 7\sqrt{5}) = 4Fr;$$

F Seitenfläche.

12. **Reguläres Ikosaeder.**

$$a = {}^1/_5\, r\sqrt{50 - 10\sqrt{5}} = \varrho\sqrt{3}\,(3 - \sqrt{5});$$
$$O = 5a^2\sqrt{3}; \quad V = {}^5/_{12}\, a^3\,(3 + \sqrt{5}) = {}^{20}/_3\, Fr;$$

F Seitenfläche.

13. **Kreiszylinder.**

$$M = 2r\pi h;$$
$$O = 2r\pi(h + r); \quad V = r^2\pi h.$$

14. **Schief abgeschnittener Kreiszylinder.**

$$M = r\pi(s_1 + s_2); \quad V = {}^1/_2\, r^2\pi(s_1 + s_2);$$

s_1 und s_2 die kürzeste bezw. längste Mantellinie.

15. **Kreiszylinderhuf.**

Die Grundfläche ist ein Kreissegment mit der Sehne 2a, der Höhe b und der Öffnung 2α; die größte Mantellinie ist s.

$$M = \frac{2rs}{b}\,[(b - r)\operatorname{arc}\alpha + a].$$

$$V = \frac{s}{3b}\,[a(3r^2 - a^2) + 3r^2(b - r)\operatorname{arc}\alpha].$$

16. **Hohlzylinder.**

R, r, ϱ großer bezw. kleiner, mittlerer Radius; $\delta = R - r$.

$$V = \pi h(R^2 - r^2) = \pi h\delta(2R - \delta) = 2\pi h\delta\varrho.$$

17. **Kreiskegel.**

s Mantellinie, r Radius vom Grundkreis.

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}; \quad M = r\pi s = r\pi\sqrt{r^2 + h^2};$$
$$O = r\pi(r + s); \quad V = {}^1/_3\, r^2\pi h.$$

18. **Kegelstumpf.**

$$s = \sqrt{(R - r)^2 + h^2};$$

$$M = \pi s (R + r); \quad V = \tfrac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr).$$

s Mantellinie, R und r Radien vom Grund- und Deckkreis.

19. **Kugel.** $O = 4 r^2 \pi = d^2 \pi; \quad V = \tfrac{4}{3} r^3 \pi = \tfrac{1}{6} d^3 \pi.$

20. **Kugelzone.**

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}\right)^2;$$

$$M = 2 r \pi h; \quad V = \tfrac{1}{6} \pi h (3 a^2 + 3 b^2 + h^2);$$

a und b Radien vom großen bezw. kleinen Zonenkreis.

21. **Kugelabschnitt (= Kalotte).**

$$a^2 = h (2 r - h);$$

$$M = 2 r \pi h = \pi (a^2 + h^2);$$

$$V = \tfrac{1}{6} \pi h (3 a^2 + h^2) = \tfrac{1}{3} \pi h^2 (3 r - h);$$

a Radius vom Grundkreis.

22. **Kugelausschnitt.**

$$O = r \pi (2h + a); \quad V = \tfrac{2}{3} r^2 \pi h;$$

a Radius vom Schnittkreis, h Höhe der Kalotte.

23. **Kugelkeil (= Kugelzweieck).**

$$M = 2 r^2 \operatorname{arc} \alpha; \quad V = \tfrac{2}{3} r^3 \operatorname{arc} \alpha.$$

24. **Ellipsoid.**

$$V = \tfrac{4}{3} a b c \pi;$$

a, b, c Halbaxen.

25. **Rotationsparaboloid.**

$$V = \tfrac{1}{2} r^2 \pi h;$$

h Höhe, r Radius vom Grenzkreis.

26. **Guldins Sätze** über Rotationskörper § 63.

27. **Prismatoid,** d. i. ein Körper, der oben und unten durch parallele Flächen, seitlich durch beliebige Ebenen begrenzt wird. G Grundfläche, S Mittelschnitt, D Deckfläche, h Abstand der Endflächen. Berechnung nach der Simpsonschen Regel § 62.

$$V = \tfrac{1}{6} h (G + 4S + D).$$

II. Elemente der Trigonometrie.

§ 4. Goniometrische oder trigonometrische Funktionen.

Wenn △ ABC rechtwinklig ist (Fig. 1), so ist definiert:

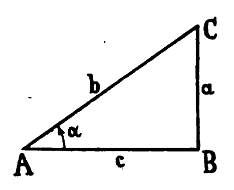


Fig. 1

1. **Sinusfunktion** von a, abgekürzt $\sin a = BC : AC$.
   (= Gegenkathete zu Hypotenuse.)
2. **Kosinusfunktion** von a, abgek. $\cos a = AB : AC$.
   (= Ankathete zu Hypotenuse.)
3. **Tangensfunktion,** abgek. $\mathrm{tg}\, a = BC : AB$.
   (= Gegenkathete zu Ankathete.)
4. **Kotangensfunktion** von a, abgek. $\mathrm{cotg}\, a = AB : BC$.
   (= Ankathete zu Gegenkathete.)
5. **Secansfunktion** von a, abgek. $\sec a = AC : AB$.
   (= Hypotenuse zu Ankathete.)
6. **Kosecansfunktion** von a, abgek. $\mathrm{cosec}\, a = AC : BC$.
   (= Hypotenuse zu Gegenkathete.)

7. Man nennt Kosinus, Kotangens und Kosecans die **Kofunktionen** von Sinus, Tangens, Secans und umgekehrt.

8. Die trigonometrische Funktion von a ist gleich der Kofunktion des Komplementwinkels $90^0 - a$,

$$f(a) = \mathrm{cof}\,(90^0 - a).$$

§ 5. Koordinaten.

1. **Koordinaten** sind Zahlen, durch deren Angabe die Lage eines Elementargebildes (Punkt, Gerade etc.) eindeutig bestimmt ist.

2. Das Plus- und Minuszeichen dient in der Mathematik zur Definition eines Richtungssinnes, z. B. links und rechts, oben und unten, Uhrzeiger- und Gegenuhrzeigersinn etc.

3. Unter Berücksichtigung des **Richtungssinnes** gilt für beliebig gelegene Punkte A, B, C auf einer Geraden oder auf einem Kreis.

$$AB = -BA \qquad \text{bezw.} \quad \overset{\frown}{AB} = -\overset{\frown}{BA};$$

$$AB + BA = 0 \qquad \text{„} \quad \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BA} = 0;$$

$$AB + BC + CA = 0 \qquad \text{„} \quad \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA} = 0;$$

$$AB + BC = AC \qquad \text{„} \quad \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC};$$

$\overset{\frown}{AB}$ Kreisbogen von A nach B.

4. **Orientierung auf der Geraden.** Die Lage eines Punktes der Geraden ist durch Angabe einer Zahl bestimmt, d. i. die Koordinate des Punktes. Siehe auch § 77.

5. **Orientierung in der Ebene.** Ein Punkt der Ebene ist durch zwei Zahlen bestimmt, d. i. ist durch seine Koordinaten. Diejenigen beiden fixen Elemente, zu denen der Punkt durch die beiden Zahlen in Beziehung gesetzt wird, bilden das Koordinatensystem. Siehe auch § 77.

6. **Rechtwinkliges** oder **kartesisches Koordinatensystem.** Seine Elemente sind zwei Senkrechte, ihr Schnittpunkt ist der Koordinatenanfangspunkt (= Nullpunkt, Ursprung). Die (für den Beobachter meist) horizontale Axe wird Abszissen- oder x-Axe genannt, die vertikale Ordinaten- oder y-Axe (Fig. 2). **Abszisse** des Punktes P (= sein x) ist der in Richtung der x-Axe gemessene Weg von O nach P, d. i. OQ, so daß also OQ = x, QO = —x; **Ordinate** (= sein y) ist der in Richtung der y-Axe gemessene Weg von O nach P, d. i. OR, so daß also OR = y, RO = —y. P = x|y bezw. P = 3|2 bedeutet: P hat die Abscisse x bezw. 3 und die Ordinate y bezw. 2.

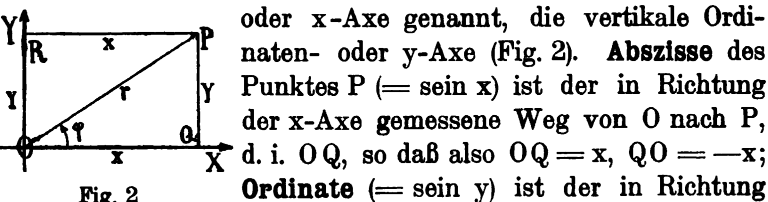


Fig. 2

§ 6.

Erweiterte Definition der trigonometrischen Funktionen.

Die bisherigen Definitionen sind nur anwendbar auf Winkel $< 90^0$. Mit Benutzung eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 2) — der **Radiusvektor** $OP = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist stets positiv zu nehmen — ergeben sich folgende Definitionen:

1. **Sinus** von φ ist das Verhältnis der Ordinate zum Radiusvektor, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$.

2. **Kosinus** von φ ist das Verhältnis der Abszisse zum Radiusvektor, $\cos\varphi = \frac{x}{r}$.

3. **Tangens** von φ ist das Verhältnis der Ordinate zur Abszisse, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

4. **Kotangens** von φ ist das Verhältnis der Abszisse zur Ordinate, $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{x}{y}$.

§ 7. Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

1 Der **Sinus** ist im ersten und zweiten Quadranten positiv, im dritten und vierten negativ. Er nimmt im ersten und vierten Quadranten zu, im zweiten und dritten ab.

2. Die Sinusfunktion ist eine ungerade Funktion (s. § 35),

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

3. Die Sinusfunktion ist eine periodische Funktion, ihre Periode ist 2π; wenn k eine ganze Zahl, gilt

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha.$$

4. Für reelle Werte α ist $\sin\alpha$ stets ein echter Bruch mit den Extremwerten ± 1.

5. Der **Kosinus** ist im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten negativ. Er nimmt im ersten und zweiten Quadranten ab, im dritten und vierten zu.

6. Die Kosinusfunktion ist eine gerade Funktion (siehe § 35),

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

7. Die Kosinusfunktion ist periodisch, ihre Periode ist 2π; wenn k eine ganze Zahl, gilt

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha.$$

8. Für reelle Werte α ist $\cos\alpha$ stets ein echter Bruch mit den Extremwerten ± 1.

9. **Tangens** und **Kotangens** sind im ersten Quadranten positiv, im zweiten negativ, im dritten positiv usw. Tangens nimmt stets zu, Kotangens stets ab.

Tangens und Kotangens sind ungerade Funktionen (s. § 35),

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha; \quad \mathrm{cotg}(-\alpha) = -\mathrm{cotg}\,\alpha.$$

11. Tangens und Kotangens sind periodische Funktionen, ihre Periode ist π; wenn k eine ganze Zahl, gilt

$$\mathrm{tg}(\alpha + k\pi) = \mathrm{tg}\,\alpha; \quad \mathrm{cotg}(\alpha + k\pi) = \mathrm{cotg}\,\alpha.$$

12. Für reelle Werte α kann $\mathrm{tg}\,\alpha$ und $\mathrm{cotg}\,\alpha$ jeden reellen Zahlenwert annehmen.

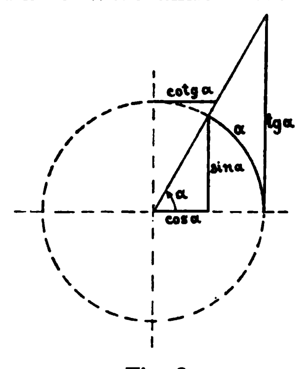


Fig. 3.

13. Die graphische Darstellung der trigonometrischen Funktionen siehe Kurven-Diskussion.

14. Am Einheitskreis (= Kreis mit Radius 1) ist dargestellt: $\sin\alpha$ durch die Vertikalprojektion des zu α gehörigen Radiusvektors, $\cos\alpha$ durch dessen Horizontalprojektion, $\mathrm{tg}\,\alpha$ durch das dem Radiusvektor entsprechende vertikale Tangentenstück, $\mathrm{cotg}\,\alpha$ durch das horizontale Tangentenstück (Fig. 3).

15.

	0°	90°	180°	270°	360°	30°	45°	60°
sin	0	1	0	−1	0	$^1/_2$	$^1/_2\sqrt{2}$	$^1/_2\sqrt{3}$
cos	1	0	−1	0	1	$^1/_2\sqrt{3}$	$^1/_2\sqrt{2}$	$^1/_2$
tg	0	∞	0	∞	0	$^1/_3\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotg	∞	0	∞	0	∞	$\sqrt{3}$	1	$^1/_3\sqrt{3}$

16.

	$-\alpha$	$90^0 \mp \alpha$	$180^0 \mp \alpha$	$270^0 \mp \alpha$	$360^0 \mp \alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{cotg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{cotg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{cotg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{cotg}\alpha$

17. $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

18. $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

19. $$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1 \quad \text{oder} \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

20. $$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

21.

Gegeben	Gefunden			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$
$\sin\alpha$		$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 a}}{\sin\alpha}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$		$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos a}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$		$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
$\operatorname{cotg}\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$	$\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$	

§ 8. Trigonometrische Funktionen von Winkelsummen und Winkelteilen.

1. $$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$

2. $$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

3. $$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

4. $$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}.$$

5. $$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \quad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

6. $$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

7. $$\sin n\alpha = \binom{n}{1}\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3}\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + \binom{n}{5}\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - + \cdots$$

8. $$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

9. $$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

10. $$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \binom{n}{2}\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{4}\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha - + \cdots$$

11. $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}.$$

12. $$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2}.$$

13. $$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

14. $$\operatorname{cotg} 3\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^3\alpha - 3\operatorname{cotg}\alpha}{3\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}.$$

15. $$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right].$$

16. $$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}\right].$$

17. $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

18. $$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

§ 9. Summen und Produkte trigonometrischer Funktionen.

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$

2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$

4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

5. $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^0 + \alpha).$

6. $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^0 + \alpha).$

7. $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$

8. $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$

9. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$

10. $\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$

11. $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sin 2a} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$

12. $\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{cotg}2\alpha.$

13. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$

14. $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$

15. $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta).$

16. $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta).$

17. $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta).$

18. Wenn $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, so gilt

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.$$

4. $$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}.$$

5. $$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \quad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

6. $$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

7. $$\sin n\alpha = \binom{n}{1}\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3}\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + \binom{n}{5}\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - + \cdots$$

8. $$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

9. $$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

10. $$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \binom{n}{2}\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{4}\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha - + \cdots$$

11. $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}.$$

12. $$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2}.$$

13. $$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

14. $$\operatorname{cotg} 3\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^3\alpha - 3\operatorname{cotg}\alpha}{3\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}.$$

15. $$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right].$$

16. $$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}\right].$$

17. $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

18. $$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

§ 9. Summen und Produkte trigonometrischer Funktionen.

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$

2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$

4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

5. $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^0 + \alpha).$

6. $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^0 + \alpha).$

7. $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$

8. $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$

9. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$

10. $\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$

11. $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$

12. $\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{cotg}2\alpha.$

13. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$

14. $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$

15. $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta).$

16. $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta).$

17. $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta).$

18. Wenn $\alpha+\beta+\gamma = 180^0$, so gilt

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2.$$
$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\alpha/_2\cos\beta/_2\cos\gamma/_2.$$
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\alpha/_2\sin\beta/_2\sin\gamma/_2 + 1.$$

§ 10. Kreissfunktionen.

1. **arcsin a** ist definiert als der Bogen, dessen Sinus a ist. arcsin a hat unendlich viele Werte; wenn der Hauptwert α von arcsin a der Bogen zwischen $-{}^1/_2\pi$ und $+{}^1/_2\pi$ ist, dann ist

$$\arcsin a = (-1)^k\alpha + k\pi \cdots\cdots k \text{ ganze Zahl.}$$

2. **arccos a** ist definiert als der Bogen, dessen Kosinus a ist. arccos a hat unendlich viele Werte; wenn der Hauptwert α von arccos a der Bogen zwischen 0 und π ist, dann ist

$$\arccos a = \pm\alpha + 2k\pi \cdots\cdots k \text{ ganze Zahl.}$$

3. **arctg a** ist definiert als der Bogen, dessen Tangens a ist. arctg a hat unendlich viele Werte; wenn der Hauptwert α von arctg a der Bogen zwischen $-{}^1/_2\pi$ und $+{}^1/_2\pi$ ist, dann ist

$$\operatorname{arctg} a = \alpha + k\pi \cdots\cdots k \text{ ganze Zahl.}$$

4. **arccotg a** ist definiert als der Bogen, dessen Kotangens a ist. arccotg a hat unendlich viele Werte; wenn der Hauptwert α von arccotg a der Bogen zwischen 0 und π ist, dann ist

$$\operatorname{arccotg} a = \alpha + k\pi \cdots\cdots k \text{ ganze Zahl.}$$

5.
$$\arcsin x + \arccos x = {}^1/_2\pi.$$
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = {}^1/_2\pi.$$

6.
$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arccotg}\frac{1}{x}$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}.$$

7. $\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin\left[x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right]$
$= \arccos\left[\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \mp xy\right]$.

$\arccos x \pm \arccos y = \arcsin\left[y\sqrt{1-x^2} \pm x\sqrt{1-y^2}\right]$
$= \arccos\left[xy \mp \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right]$.

8. $\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$.

9. Die geeignete Wahl von x und y macht die rechte Gleichungsseite zu $\operatorname{arctg} 1 = {}^1/_4\,\pi$, z. B.

$$\operatorname{arctg} {}^1/_2 + \operatorname{arctg} {}^1/_3 = \operatorname{arctg} 1 = {}^1/_4\,\pi.$$

§ 11. Ebenes Dreieck.

Wenn a, b, c die Dreieckseiten, α, β, γ die Gegenwinkel, ϱ und r die Radien des eingeschriebenen bezw. umschriebenen Kreises sind und $2s = a + b + c$ der halbe Umfang, so gilt

1. **Sehnensatz.**

$$a = 2r \sin\alpha.$$

2. **Sinussatz.**

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

3. **Tangentensatz (Nepersche Gleichungen).**

$$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

4. **Projektionssatz.**

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta.$$

5. **Tangentenformel.**

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}.$$

6. **Kosinussatz.**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$= (b + c)^2 - 4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}$$
$$= (b - c)^2 + 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

7. Satz vom halben Winkel.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{\varrho}{s-a}.$$

8. $\sin\alpha=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)s-c)}$.

9. Mollweidesche Gleichung.

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}};\quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

10. Höhenformel.

$$h_a=b\sin\gamma=c\sin\beta.$$

11. Formel für die **Mittellinie.**

$$m_a={}^1/_2\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}.$$

12. Formel für die **Winkelhalbierende.**

$$w_a=\frac{2\sqrt{bc\,s(s-a)}}{b+c}=\frac{\sqrt{bc\,[(b+c)^2-a^2]}}{b+c}.$$

13. $\varrho=(s-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};\quad \varrho s=\varrho_a(s-a);\quad abc=4r\varrho s.$

ϱ_i sind die Radien der angeschriebenen Kreise.

14. $\varrho=4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2};$

$$s=4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

15. Dreiecksinhalt.

$$F=\frac{1}{2}a\,h_a=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$$=\sqrt{s(s-a)s-b)(s-c)}=\varrho s=\varrho_a(s-a)=$$

$$=\sqrt{\varrho\,\varrho_a\,\varrho_b\,\varrho_c}=2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

16. **Reguläres Polygon.**
s ist die Seite des eingeschriebenen, σ die des umschriebenen n-Ecks, 2α ist der zur Seite s, bezw. σ gehörige Zentriwinkel.

a) eingeschriebenes Polygon.

$$s = 2r \sin\alpha; \; \alpha = \frac{\pi}{n};$$

$$\text{Inhalt} = {}^1/_2\, n r^2 \sin 2\alpha = {}^1/_4\, n s^2 \operatorname{cotg}\alpha.$$

b) umschriebenes Polygon.

$$\sigma = 2r \operatorname{tg}\alpha;$$

$$\text{Inhalt} = n r^2 \operatorname{tg}\alpha.$$

Sind s' und σ' die Seiten des eingeschriebenen, bezw. umschriebenen 2n-Ecks, so gilt

$$s' = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s^2}};$$

$$\sigma\sigma' = 2r\left[\sqrt{4r^2 + \sigma^2} - 2r\right].$$

§ 12. Sphärisches Dreieck.

a, b, c die Dreieckseiten und α, β, γ die Gegenwinkel, $2s = a + b + c$, $2\sigma = \alpha + \beta + \gamma$, $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ der **sphärische Exzess.**

1. **Sinussatz.**

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

2. **Kosinussatz.**

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha;$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos a.$$

3. **Sinus-Kosinussatz.**

$$\cos a \sin b = \sin c \cos\alpha + \sin a \cos b \cos\gamma;$$

$$\cos a \sin c = \sin b \cos\alpha + \sin a \cos c \cos\beta;$$

$$\cos\alpha \sin\beta = \sin\gamma \cos a - \sin\alpha \cos\beta \cos c;$$

$$\cos\alpha \sin\gamma = \sin\beta \cos a - \sin\alpha \cos\gamma \cos b.$$

4. **Kotangentensatz.**

$$\operatorname{cotg} a \sin b = \operatorname{cotg}\alpha \sin\gamma + \cos b \cos\gamma$$

$$\operatorname{cotg}\alpha \sin\beta = \operatorname{cotg} a \sin c - \cos\beta \cos c.$$

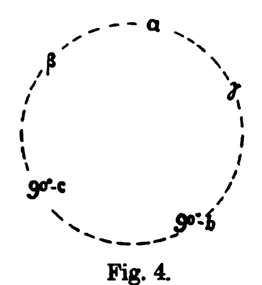


Fig. 4.

5. Für rechtwinklige Dreiecke gilt die **Nepersche Regel.** (Fig. 4; a ist die Hyotenuse, $\alpha = 90^0$). Der Kosinus eines Elementes (a, $90^0 - b$, $90^0 - c$, β, γ) ist gleich dem Produkt aus den Sinus der getrennten Elemente und auch gleich dem Produkt der Kotangens der anliegenden Elemente; also

$$\cos a = \cos b \cos c = \operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \gamma$$
$$\cos \gamma = \sin \beta \cos c = \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b$$
$$\sin b = \sin a \sin \beta = \operatorname{tg} c \operatorname{cotg} \gamma$$
$$\sin c = \sin a \sin \gamma = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} \beta$$
$$\cos \beta = \sin \gamma \cos b = \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} c.$$

6. Satz vom halben Winkel.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin b \sin c}};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a)}{\sin b \sin c}};$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{- \cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}};$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}}.$$

7. Gausssche Gleichungen.

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{b + c}{2} = \sin \frac{a}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2};$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{b + c}{2} = \cos \frac{a}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{b - c}{2} = \sin \frac{a}{2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{b - c}{2} = \cos \frac{a}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

8. **Nepersche Analogien.**

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\operatorname{tg}\frac{c}{2}\,\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\operatorname{tg}\frac{c}{2}\,\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\,\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\,\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}.$$

9. $$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}.$$

(l'Huiliersche Formel.)

10. **Fläche des sphärischen Dreiecks.**

Die Flächen von zwei sphärischen Dreiecken verhalten sich wie ihre sphärischen Exzesse.

$$F=r^2\operatorname{arc}\varepsilon.$$

III. Elemente der niedern Algebra und Analysis.

A. Grundoperationen.

§ 13. Summe und Differenz. Produkt und Quotient.

1. **Summensätze.**

$$a + b = b + a.$$
$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

2. Die **Differenz** $a - b$ ist als ein gesuchter Summand definiert.

3. Solange a von ∞ verschieden, gilt

$$\left.\begin{aligned} a - a &= 0 \\ \infty - a &= \infty \end{aligned}\right\} \quad \infty - \infty \text{ unbestimmter Wert.}$$

4. Definition.

$$(+)(+) = +, \quad (+)(-) = -,$$
$$(-)(+) = -, \quad (-)(-) = +.$$

5. Bezeichnet $|n|$ den absoluten Wert der Zahl n, so ist

$$|a + b| \leqq |a| + |b|.$$

6. **Produktsätze.**

$$a \cdot b = b \cdot a.$$
$$(ab) \cdot c = a \cdot (bc).$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

7. Der **Quotient** $\frac{a}{b}$ ist definiert als ein gesuchter Faktor.

8. Solange a von ∞, bezw. von 0 verschieden, ist

$$\left.\begin{aligned} a \cdot 0 &= 0 \\ a \cdot \infty &= \infty \end{aligned}\right\} \quad \infty \cdot 0 \text{ unbestimmter Wert.}$$

9. Solange a von 0 und ∞ verschieden, ist $\frac{a}{a} = 1$.

10. Solange a von 0 verschieden, ist

$$\left.\begin{array}{l} \frac{0}{a} = 0 \\ \frac{a}{0} = \infty \end{array}\right| \; \frac{0}{0} \text{ unbestimmter Wert.}$$

11. Solange a von ∞ verschieden, ist

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\infty}{a} = \infty \\ \frac{a}{\infty} = 0 \end{array}\right| \; \frac{\infty}{\infty} \text{ unbestimmter Wert.}$$

12. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.
$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$.
$(a \pm b)^n$ siehe binomischer Lehrsatz.

13. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
$a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$.
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
$a^n + b^n$ siehe Moivrescher Satz.

14. Die **Proportion** $a : b = \alpha : \beta$ oder $a : \alpha = b : \beta$ definiert: a ist das Ebensovielfache von α wie b von β; die Proportion läßt sich also unter Einführung eines zunächst unbestimmt bleibenden **Proportionalitätsfaktors** auflösen in

$$\left.\begin{array}{l} a = \varrho\alpha \\ b = \varrho\beta \end{array}\right\}$$

Entsprechend löst sich $a : b : c = \alpha : \beta : \gamma$ oder $a : \alpha = b : \beta = c : \gamma$ auf in

$$a = \varrho\alpha, \quad b = \varrho\beta, \quad c = \varrho\gamma.$$

Damit lassen sich alle Formeln der korrespondierenden Addition und Subtraktion sofort anschreiben.

15. **Arithmetisches Mittel** x zweier Zahlen a und b

$$x = \frac{a + b}{2}$$

Arithmetisches Mittel x von n Zahlen $a_1, a_2 \cdots$

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{n} = \frac{\sum a}{n}$$

Verallgemeinertes arithmetisches Mittel von n Zahlen $a_1, a_2 \cdots\cdots$ mit den „Gewichten" $p_1, p_2 \cdots\cdots$

$$x = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{\sum a p}{\sum p}$$

(siehe hierzu Schwerpunktsatz, Ausgleichsrechnung).

16. Allgemein heißt man Mittel von n Zahlen diejenigen symmetrischen Funktionen dieser n Zahlen, welche sich auf a reduzieren, wenn man alle diese Zahlen gleich a setzt.

17. **Geometrisches Mittel** y von a und b

$$y = \sqrt{ab} \quad \text{oder} \quad a : y = y : b.$$

Geometrisches Mittel y von n Zahlen $a_1, a_2 \cdots\cdots a_n$

$$y = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_n}.$$

18. **Harmonisches Mittel** z von a und b

$$z = \frac{2ab}{a+b} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Harmonisches Mittel z von n Zahlen $a_1, a_2 \cdots\cdots a_n$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

§ 14. Potenz.

1. Definition. Solange m positiv und ganz und von Null verschieden, ist

$$a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \cdots\cdots a \qquad \text{(m Faktoren).}$$

2. Definition. Solange a von 0 und ∞ verschieden, ist

$$a^0 = 1.$$

3. Definition. Solange m ganz, gilt

$$a^{-m} = 1 : a^m.$$

4. **Potenzsätze.**

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}. \qquad a^r : a^s = a^{r-s} = 1 : a^{s-r}.$$

$$(a\,b)^m = a^m b^m. \qquad (a:b)^m = a^m : b^m.$$

$$(a^r)^s = a^{rs} = (a^s)^r.$$

5. Solange a von 0 bezw. von 0 und ∞ verschieden, ist

$$\left.\begin{array}{r} 0^a = 0 \\ \text{bezw. } a^0 = 1 \end{array}\right\} 0^0 \text{ unbestimmter Wert.}$$

6. Solange a von 0 bezw. 0 und ∞ verschieden, ist

$$\left.\begin{array}{r} \infty^a = \infty \\ \text{bezw. } a^0 = 1 \end{array}\right\} \infty^0 \text{ unbestimmter Wert.}$$

7. $a^\infty = \left.\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \infty \end{array}\right\}$ wenn $|a| \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} 1$.

(siehe auch unbestimmte Formen).

8. Die Operationen von § 13 und § 14 nennt man **rationale** Operationen. Sie liefern eindeutige Werte für alle endlichen reellen Zahlen.

§ 15. Wurzeln.

1. Definition. $\sqrt[r]{a^s}$ ist diejenige Zahl, die mit r potenziert a^s gibt. a^s heißt Radikand, r Wurzelexponent, s Potenzexponent. Statt $\sqrt[r]{a^s}$ schreibt man auch $a^{s/r}$.

2. **Wurzelsätze.**

$$\sqrt[r]{a^s} = \left(\sqrt[r]{a}\right)^s = a^{s/r}.$$

$$\sqrt[r]{a\,b} = \sqrt[r]{a}\,\sqrt[r]{b}. \qquad \sqrt[r]{a:b} = \sqrt[r]{a} : \sqrt[r]{b}.$$

$$\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[rs]{a} = \sqrt[s]{\sqrt[r]{a}}.$$

$$\sqrt[r]{a^s} = \sqrt[nr]{a^{ns}}.$$

$$\sqrt[r]{a}\,\sqrt[s]{a} = \sqrt[rs]{a^{r+s}}$$

3. $\sqrt[r]{a^s}$ nennt man eine **irrationale** Operation; sie ist r-deutig, da $\sqrt[r]{a^s}$ genau r Werte hat (siehe Moivrescher Lehr-

satz). Die Operationen der §§ 13, 14, 15 nennt man **algebraische.**

§ 16. Logarithmus.

1. Definition: $\overset{b}{\log} a$ ist diejenige Zahl, mit der man b potenzieren muß, um a zu erhalten. a heißt Numerus oder Logarithmand, b Basis des Logarithmus. Der Logarithmus ist ein gesuchter Potenzexponent.

2. **Logarithmensätze.**

$$a = b^{\overset{b}{\log} a}.$$

$$\overset{b}{\log}(rs) = \overset{b}{\log} r + \overset{b}{\log} s. \qquad \overset{b}{\log}(r:s) = \overset{b}{\log} r - \overset{b}{\log} s$$

$$\overset{b}{\log} a^m = m \overset{b}{\log} a. \qquad \overset{b}{\log} \sqrt[r]{a^s} = \frac{s}{r} \overset{b}{\log} a.$$

$$\overset{b}{\log} a = \overset{m}{\log} a : \overset{m}{\log} b \text{ für beliebiges m.}$$

$$\overset{b}{\log} b = 1, \text{ wenn b von 0 und } \infty \text{ und 1 verschieden.}$$

$$\overset{b}{\log} 1 = 0, \text{ wenn b von 0 und } \infty \text{ und 1 verschieden.}$$

$$\overset{b}{\log} 0 = \begin{Bmatrix} +\infty, & \text{wenn } 0 < b < 1 \\ -\infty, & \infty > b > 1 \end{Bmatrix}.$$

3. **Künstlicher und natürlicher Logarithmus.** $\log a$ abgekürzt statt $\overset{10}{\log} a$ ist der Briggsche oder künstliche oder Zehner-Logarithmus von a. $\lg a$ statt $\overset{e}{\log} a$ ist der natürliche Logarithmus von a; über $e = 2{,}718\,281\,828\,459 \cdots\cdots$ siehe Reihen.

4. **Übergang vom natürlichen zum künstlichen Logarithmensystem und umgekehrt.**

$$\log e = 0{,}434\,294\,481\,903 \cdots$$
$$\lg 10 = 2{,}302\,585\,092\,994 \cdots = M = 1 : \log e$$
$$\lg a = \log a : \log e = M \log a$$

d. h. der natürliche Logarithmus ist etwas mehr wie doppelt so groß als der künstliche.

B. Kombinatorik.

§ 17. Die Zahlen $n!$ und $\binom{n}{p}$.

1. Definition. Für positives ganzes n, größer als Null vorausgesetzt, gilt

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots\cdots (n-1) \cdot n. \quad (n! \text{ sprich } \textbf{n-Fakultät})$$

2. Definition.

$$0! = 1.$$

3. Sätze.

$$n! = (n-1)!\, n.$$

$$(\sqrt{n})^n \leqq n! \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

4. Definition. Für positives ganzes p, größer als Null vorausgesetzt, gilt

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots\cdots(n-p+2)\,(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \qquad\qquad (p-1) \cdot p}.$$

Zahlen von der Form $\binom{n}{p}$ — sprich **„n über p“** — heißen **Binomialkoeffizienten.**

5. Definition.

$$\binom{n}{0} = 1.$$

6. **Sätze über Binomialkoeffizienten.** Wenn neben p auch noch n positiv und ganz ist, gilt

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\, p!}.$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

$$\binom{n}{n+p} = 0.$$

$$\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-3}{p-1}+\cdots\cdots+\binom{p-1}{p-1}.$$

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}.$$

$$0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+-\cdots\cdot+(-1)^n\binom{n}{n}.$$

§ 18. Permutationen, Kombinationen, Variationen.

1. Die Elemente a, b, c·····n bilden den **Zeiger** oder **Index** abc···n; sie sind im Zeiger dem **Rang** nach geordnet, so daß also b, c, ····n von höherem Rang sind als a. Irgend eine Anzahl dieser Elemente nach irgend einer Methode zusammengestellt bilden eine **Komplexion.** Permutationen, Kombinationen und Variationen sind spezielle Komplexionen. Die Umkehr der Rangfolge in einer Komplexion heißt **Inversion**: so hat z. B. die Komplexion bdca des Zeigers abcde··· die vier Invasionen ba, dc, da, ca.

2. Einen gegebenen Zeiger **permutieren** heißt ihn möglichst oft anders gruppieren. Sind alle Elemente des Zeigers verschieden, so ist die Zahl der **Permutationen**

$$P_n = n!$$

Sind α Elemente unter sich gleich, β andere ebenfalls usw., so ist die Zahl der Permutationen

$$P'_n = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\cdots}$$

3. Einen gegebenen Zeiger von n Elementen zur p^{ten} Klasse **kombinieren** heißt möglichst oft p verschiedene Elemente aus ihm herausgreifen; die Reihenfolge der Elemente ist dabei belanglos. Wiederholt sich kein Element, so ist die Zahl der **Kombinationen** dieser n Elemente zur p^{ten} Klasse

$$C_{n,p}=\binom{n}{p}.$$

Darf sich jedes Element bis p-mal wiederholen, so ist

$$C'_{n,p}=\binom{n+p-1}{p}.$$

4. Einen gegebenen Zeiger von n Elementen zur p^{ten} Klasse **variieren** heißt ihn zuerst zur p^{ten} Klasse kombinieren und jede solche Kombination noch permutieren. Wiederholt sich kein Element, so ist die Zahl der **Variationen** dieser n Elemente zur p^{ten} Klasse

$$V_{n,p} = \binom{n}{p} p!$$

Darf sich jedes Element bis p-mal wiederholen, so ist

$$V'_{n,p} = n^p$$

§ 19. Binomischer Lehrsatz.

1. **Allgemeinste Form.** $(x + a_1)(x + a_2) \cdots\cdots (x + a_n)$

$$= x^n + x^{n-1} \sum C_n^1 + x^{n-2} \sum C_n^2 + \cdots\cdots + x \sum C_n^{n-1} + \sum C_n^n$$

$$= x^n + x^{n-1}(a + a_2 + \cdots + a_n) + x^{n-2}(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots\cdots a_{n-1} a_n)$$

$$+ x^{n-3}(a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \cdots\cdot) + \cdots\cdots\cdots + a_1 a_2 \cdots\cdots a_n .$$

Der Koeffizient $\sum C_n^p$ von x^{n-p} ist die Summe aller Kombinationen des Zeigers $a_1 a_2 \cdots a_n$ zur p^{ten} Klasse.

2. **Spezielle Form.**

a) $$(x + y)^m = x^m + \binom{m}{1} x^{m-1} y + \binom{m}{2} x^{m-2} y^2 + \cdots\cdots + \binom{m}{1} x y^{m-1} + y^m ,$$

b) $$(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \cdots\cdot + \binom{m}{1} x^{m-1} + x^m .$$

x und y beliebig, m positiv und ganz.

3. **Paskalsches Dreieck** oder Binomialtafel, d. i. Schema aller Binomialkoeffizienten $\binom{n}{p}$.

```
                  1
               1     1
            1     2     1
         1     3     3     1
      1     4     6     4     1
   1     5    10    10     5     1
1  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  1
.  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
```

§ 20. Determinanten.

1. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{11} a_{22} \dots a_{nn}) = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

ist eine **Determinante n^{ten} Grades.** Sie hat n Horizontalreihen oder **Zeilen,** n Vertikalreihen oder **Kolonnen** und n^2 **Elemente** a_{ik}. Man nennt $a_{11}\ a_{22} \dots a_{nn}$ **Hauptdiagonale,** a_{11} **Kopf,** $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ **Hauptelemente** der Determinante.

2. Eine Determinante wird **entwickelt,** indem man in der Hauptdiagonale die ersten Indices der Einzelelemente unverändert läßt, die zweiten aber möglichst oft permutiert (oder umgekehrt). Das Vorzeichen der einzelnen so entstehenden **Determinantenglieder** ist + oder —, je nachdem die Anzahl der Inversionen der Indices gerad bezw. ungerad. Die Determinante n^{ten} Grades hat n! Glieder.

3. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Die **Determinante zweiten Grades** ist gleich Hauptdiagonale minus Nebendiagonale.

4. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}.$$

5. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man sie **stürzt** d. h. Zeilen und Kolonnen gegenseitig vertauscht.

6. Streicht man in einer Determinante n^{ten} Grades p beliebige Zeilen und p beliebige Kolonnen, so bilden die doppelt

gestrichenen Elemente eine Determinante p^{ten} Grades, die nicht gestrichene eine solche $n-p^{ten}$ Grades. Solche Determinanten heißen **Minoren.** Der Minor der doppelt gestrichenen Elemente heißt die **Adjungierte** zum Minor der nicht gestrichenen.

7. Ein Minor ist von **gerader** oder **ungerader Klasse,** je nachdem die Anzahl der Reihenvertauschungen, die man vornehmen muß, um ihn in eine Symmetriestellung zur Hauptdeterminante zu bringen, eine gerade bezw. ungerade ist. Versieht man die Adjungierte A eines gegebenen Minors B mit dem + bezw. — Zeichen je nach ihrer geraden bezw. ungeraden Klasse, so nennt man A die **algebraische Adjungierte** oder **Unterdeterminante** zum Minor B.

8. Den Minor eines Elementes a_{ik} findet man, wenn man Zeile und Kolonne dieses Elementes streicht. Die Unterdeterminante A_{ik} des Elementes a_{ik} ist gleich dem Minor zu a_{ik} versehen mit + oder — je nach der geraden bezw. ungeraden Klasse von A_{ik}.

$$9.\quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$$

Eine Determinante wird entwickelt, indem man alle Elemente einer beliebigen Reihe mit ihren Unterdeterminanten multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert.

$$10.\quad a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = 0$$

Multipliziert man alle Elemente einer beliebigen Reihe mit den Unterdeterminanten der entsprechenden Elemente einer Parallelreihe, so ist die Summe dieser Produkte gleich Null.

$$11.\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}.$$

Vertauschung zweier Parallelreihen ändert das Vorzeichen der Determinante.

12. $$\varrho \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \varrho a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \varrho a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \varrho a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Eine Determinante wird mit einem Faktor **multipliziert,** indem man alle Elemente einer beliebigen Reihe mit diesem Faktor multipliziert. (Umkehr.)

13. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \varrho a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \varrho a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & \varrho a_{31} \end{vmatrix} = 0$$

Determinanten mit **gleichen oder proportionalen Parallelreihen** haben den Wert Null.

14. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

Sind die Elemente einer Reihe **Binome,** so ist die Determinante gleich der Summe von zwei neuen Determinanten, deren jede in der betreffenden Reihe anstatt des Binoms einen entsprechenden Summanden hat. (Umkehr.)]

15. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+\varrho a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+\varrho a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+\varrho a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man zu einer Reihe das Vielfache einer Parallelreihe addiert.

16. Eine Determinante n^{ten} Grades wird auf eine solche $n-1^{ten}$ Grades **reduziert,** indem man unter Anwendung des vorhergehenden Satzes $n-1$ Elemente einer Reihe zu Null macht.

17. **Das Produkt** zweier Determinanten

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ und } B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \text{ ist}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}, & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23}, & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13}, & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23}, & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{12}+a_{33}b_{13}, & a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{23}, & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

18. Sollen zwei Determinanten A und B von ungleichem Grad multipliziert werden, so bringt man die Determinante geringeren Grades auf den höheren durch Hinzufügung neuer Elemente.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(siehe auch 20).}$$

19. Das System von p Parallelreihen einer Determinante n^{ten} Grades heißt eine **Matrix.** Aus ihr lassen sich $\binom{n}{p}$ Determinanten p^{ten} Grades, Minoren p^{ten} Grades, bilden. Man entwickelt eine Determinante, indem man jeden Minor dieser Matrix mit seiner Unterdeterminante multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert.

$$20. \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

21. Sind A_{ik} die Unterdeterminanten der Elemente a_{ik} der Determinante $A = (a_{11} a_{22} \cdots a_{nn})$, so nennt man $\mathbf{A} = (A_{11} A_{12} \cdots A_{nn})$ die **reziproke Determinante** zu A. Bezeichnet man die Unterdeterminante der Elemente A_{ik} der neuen Determinante mit $\mathbf{A}_{ik}$, so gilt

$$\mathbf{A}_{ik} = a_{ik} A^{n-2} \text{ und } \mathbf{A} = A^{n-1}.$$

22. Ist $a_{ik} = a_{ki}$, so heißt die Determinante **symmetrisch;** dann ist auch $A_{ik} = A_{ki}$.

C. Reihenlehre.

§ 21. Grenzwert.

1. Nähern sich die Elemente $u_0, u_1, u_2, \cdots u_n \cdots$ in dieser Folge mehr und mehr dem Wert g, ohne ihn aber zu erreichen (so daß also zu einem beliebig klein gegebenen Wert ε sich immer noch ein Element u_{n+r} angeben läßt, das der Bedingung $g - u_{n+r} < \varepsilon$ genügt), so nennt man die Zahlenfolge

$$u_0, u_1, u_2 \cdots u_n \cdots$$

eine **konvergente Zahlenfolge** und schreibt (limes = Grenzwert)

$$\lim_{n=\infty} u_n = g.$$

2.
$$\lim_{x=g} f(x) = G.$$

Nähert sich x dem Wert g, dann nähert sich f(x) dem Wert G, d. h. wird der Unterschied zwischen x und g verschwindend klein (= kleiner als eine beliebig klein angenommene Zahl ε), dann auch der Unterschied zwischen f(x) und G.

3. Man spricht von einer Grenze zur Rechten oder Grenze zur Linken, wenn f(x) die in 2. angegebene Eigenschaft nur rechts oder links von $x = g$ hat.

4. Eine Funktion f(x) ist **stetig** im Intervall $a \leqq x \leqq b$, wenn sie in diesem Intervall entweder beständig zu- oder beständig abnimmt und gleichzeitig an jeder Stelle dieses Intervalls einen bestimmten endlichen Wert hat. (Ausführlicheres über Stetigkeit siehe Funktionen.)

5. Nehmen die an der Stelle $x_0, y_0 \cdots$ stetigen Funktionen $u, v \cdots$ von $x, y \cdots$ dort die Werte $u_0, v_0 \cdots$ an und ist $F(u, v \cdots)$ an der Stelle $u_0, v_0 \cdots$ stetig, so ist an der Stelle $x_0, y_0 \cdots$

$$\lim F(u, v \cdots) = F(\lim u, \lim v \cdots).$$

6. Der Grenzwert einer Funktion, die sich rational aus andern stetigen Funktionen zusammensetzt, ist gleich der entsprechenden rationalen Funktion der Grenzwerte der Einzelfunktionen, solange sie endlich bleibt

$$\lim R[u(x), v(x) \cdots] = R[\lim u(x), \lim v(x) \cdots]$$

7. Solange u und v endlich und stetig, ist

$$\lim (u + v) = \lim u + \lim v$$
$$\lim (uv) = \lim u \cdot \lim v$$
$$\lim (cu) = c \lim u, \text{ wenn c konstant.}$$
$$\lim (u : v) = \lim u : \lim v.$$

Spezielle Grenzwerte.

8. $$\lim_{n=\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{matrix}\Bigg\}, \text{ wenn } a \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix}\Bigg\} b.$$

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n \text{ unbestimmt, wenn } \lim a = \lim b.$$

9. $$\lim_{a=b} \frac{a^n - b^n}{a - b} = n a^{n-1} \quad \Bigg| \quad \lim_{\delta=0} \frac{(x+\delta)^n - x^n}{\delta} = n x^{n-1}$$

$$\lim_{\delta=0} \frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta} = n.$$

10. $$\lim_{n=\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

11. $$\lim_{\omega=\infty} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega = \lim_{\delta=0} (1+\delta)^{1/\delta} = e$$

$$e = 2,718\,281\,828\,459 \cdots$$

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad \Bigg| \quad \lim_{n=\infty} \left[1 + \frac{f(x)}{n}\right]^n = e^{\lim f(x)}.$$

12. $$\lim_{n=\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \lg x$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n} = \frac{4}{e}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

$$\lim_{n=\infty} n\, e^{-nx^2} = 0$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^r + 2^r + \cdots + n^r}{n^{r+1}} = \frac{1}{r+1} \text{ für } r + 1 > 0.$$

13. $\lim\limits_{x=0} \frac{a^x - 1}{x} = \lg a$ | $\lim\limits_{x=0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x=-\infty} (e^x x^m) = 0$ | $\lim\limits_{x=0} x^x = 1$

$\lim\limits_{x=0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lg a - \lg b$ | $\lim\limits_{x=0} x \sqrt[x]{e} = \infty.$

14. $\lim\limits_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1$ | $\lim\limits_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x=0} \frac{\sin mx}{x} = m$ | $\lim\limits_{x=0} \frac{\operatorname{tg} mx}{x} = m$

$\lim\limits_{x=0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ | $\lim\limits_{x=0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$

15. $\lim\limits_{x=0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ | $\lim\limits_{x=0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x=0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = 1$ | $\lim\limits_{x=\infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x} = 1.$

16. $\lim\limits_{x=\infty} \frac{\lg x}{x} = 0$ | $\lim\limits_{x=0} \frac{\lg x}{x^n} = 0 \quad (n > 0)$

$\lim\limits_{x=0} \frac{\lg(1+x)}{x} = 1$ | $\lim\limits_{x=0} \frac{\lg(1+nx)}{x} = n$

$\lim\limits_{x=\infty} \frac{\lg(1+nx)}{x} = 0$ | $\lim\limits_{x=0} x \lg x = 0.$

§ 22. **Reihen- und Konvergenzsätze**
(siehe auch Differentialrechnung).

1. Eine **Reihe** ist eine Summe von Zahlen, die nach einem bestimmten Gesetz gebildet sind. Die Reihe heißt **endlich** oder **unendlich**, je nachdem die Anzahl der Glieder eine endliche oder unendlich große ist. Das n^{te}, sogenannte *allgemeine Glied* ist jenes, das an n^{ter} Stelle steht und das Gesetz der

Reihenbildung erkennen läßt. (In diesem Paragraphen werden nur Reihen mit reellen Gliedern behandelt; über komplexe Reihen siehe: komplexe Zahlen.)

2. Läßt man die Gliederzahl einer unendlichen Reihe mehr und mehr wachsen, so nähert sich die Summe der Glieder einem Grenzwert. Diesen nennt man die **Summe der Reihe.**

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n + \cdots$$

$$S = \lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty} [u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots]$$

S ist die Summe der Reihe S_n.

3. Eine Reihe ist **konvergent,** wenn ihre Summe eine bestimmte endliche Zahl ist; sie ist **divergent,** wenn ihre Summe unendlich ist; sie ist unbestimmt, wenn ihre Summe nicht angegeben werden kann (speziell oszillierend, wenn die Summe periodisch verschiedene Werte annimmt).

4. Daß die Glieder u_i stets abnehmen, also $\lim_{n=\infty} u_n = 0$, ist eine notwendige, aber noch nicht hinreichende Bedingung für eine konvergente Reihe.

5. **Die geometrische Reihe**

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \qquad \left(S = \frac{1 - x^n}{1 - x}\right)$$

ist für $x \geqq 1$ divergent,
für $-1 < x < 1$ konvergent,
für $x = -1$ oszillierend,
für $x < -1$ divergent.

6. **Die harmonische Reihe**

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

ist divergent.

7. Bricht man die Reihe nach dem n^{ten} Glied ab, so vernachlässigt man einen Rest, den **Reihenrest.** Ist die Reihe konvergent, so kann man an so später Stelle abbrechen, daß dieser Rest R_n unter jede noch so kleine Zahl sinkt, also $\lim R_n = 0$ wird.

8. Wenn der Rest der Reihe unter jede noch so kleine Zahl gebracht werden kann, so ist die Reihe konvergent.

9. Eine Reihe mit beständig abnehmenden Gliedern ist konvergent, wenn von einer bestimmten endlichen Stelle ab die Vorzeichen der Reihenglieder periodisch wechseln.

10. Eine Reihe heißt **einfach** oder **bedingt konvergent**, wenn ihre Glieder, alle positiv genommen, keine konvergente Reihe bilden; **unbedingt konvergent** heißt sie, wenn sie unabhängig vom Vorzeichen der Glieder konvergiert.

11. **Reihenvergleich.** Sind von einer bestimmten endlichen Stelle ab die Glieder der zu untersuchenden Reihe stets kleiner (größer) als die Glieder einer bekannten konvergenten (divergenten) Reihe, so ist auch die zu untersuchende Reihe konvergent (divergent).

12. **Konvergenzkriterien.**

$$\text{I. } \lim_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} \Big\} 1 \begin{matrix} \text{konvergente Reihe.} \\ \text{divergente Reihe.} \\ \text{unbestimmt.} \end{matrix}$$

$$\text{II. } \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} \begin{matrix} < \\ > \\ = \end{matrix} \Big\} 1 \begin{matrix} \text{konvergente Reihe.} \\ \text{divergente Reihe.} \\ \text{unbestimmt.} \end{matrix}$$

$$\text{III. } \lim_{n=\infty} n \left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} \Big\} 1 \begin{matrix} \text{konvergente Reihe.} \\ \text{divergente Reihe.} \\ \text{unbestimmt.} \end{matrix}$$

13. **Spezielle Zahlenreihen.**

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots$$

$$\lg 2 = 4\left[\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 10 \cdot 11} + \cdots\right]$$

§ 23. Arithmetische Reihen.

a) **erster Ordnung.**

1. $a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + [n - 1]d)$.
   letztes Glied $z = a + (n - 1)d$.
   Summe $s = \frac{1}{2} n (a + z)$.

2. $S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n (n + 1)$.
   $a + (a + 1) + (a + 2) + \cdots + z = \frac{1}{2}(a + z)(z - a + 1)$.
   $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$.
   $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

b) **höherer Ordnung.**

3.

$$\begin{array}{llllll} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & \ldots y_n & \text{Hauptreihe.} \\ \Delta y_0 & \Delta y_1 & \Delta y_2 & \ldots & & \text{erste Differenzreihe.} \\ \Delta^2 y_0 & \Delta^2 y_1 & \ldots & & & \text{zweite Differenzreihe.} \\ \Delta^3 y_0 & \ldots & & & & \ldots \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \Delta^n y_0 & \ldots & & & & n^{te} \text{ Differenzreihe.} \end{array}$$

4. **Bildungsgesetz** der Haupt- und Differenzreihen.

$$\Delta^r y_s = \Delta^r y_{s-1} + \Delta^{r+1} y_{s-1}.$$
$$\Delta^r y_s = \Delta^{r-1} y_{s+1} - \Delta^{r-1} y_s.$$

5. Die Hauptreihe heißt eine **arithmetische Reihe n^{ter} Ordnung,** wenn die n^{te} Differenzreihe konstante Glieder hat.

6. $\Delta^n y_0 = y_n - \binom{n}{1} y_{n-1} + \binom{n}{2} y_{n-2} - \cdots + (-1)^n y_n$

$$y_n = y_0 + \binom{n}{1} \Delta y_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 y_0 + \cdots + \Delta^n y_0.$$

7. **Summe** der n ersten Glieder der Hauptreihe

$$\sum = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}$$

$$= \binom{n}{1} y_0 + \binom{n}{2} \varDelta y_0 + \binom{n}{3} \varDelta^2 y_0 + \cdots + \varDelta^{n-1} y_0,$$

wenn die Reihe n^{ter} Ordnung ist. Ist die Reihe k^{ter} Ordnung, dann ist

$$y_n = y_0 + \binom{n}{1} \varDelta y_0 + \binom{n}{2} \varDelta^2 y_0 + \cdots + \binom{n}{k} \varDelta^k y_0 .$$

$$\sum = \binom{n}{1} y_0 + \binom{n}{2} \varDelta y_0 + \binom{n}{3} \varDelta^2 y_0 + \cdots + \binom{n}{k+1} \varDelta^k y_0 .$$

8. **Spezielle arithmetische Reihen.**

$$S(x^2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + x^2 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} .$$

$$S(x^3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + x^3 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} .$$

$$S(x^4) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + x^4 = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30} .$$

$$S(x^n) = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{2} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} B_2 x^{n-}$$

$$- \frac{1}{4}\binom{n}{3} B_7 x^{n-3} + \frac{1}{6}\binom{n}{5} B_6 x^{n-5} - + \cdots$$

B_2, B_4, $B_6 \cdots$ heißen die Bernoullischen Zahlen.

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = \frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66} \cdots$$

§ 24. Geometrische Reihen.

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1};$$

letztes Glied $z = aq^{n-1}$.

$$\text{Summe } S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{qz - a}{q - 1} .$$

Für $n = \infty$ und $|q| < 1$ ist $S = \dfrac{a}{1 - q}$.

Speziell wird für $|x|<1$

$$\lim_{n=\infty} (1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots) = \frac{1}{1-x}.$$

§ 25. Zinsrechnung, Zinseszins und Rentenrechnung.

K das zu verzinsende Kapital, p die Prozente, n die Anzahl der Jahre, die das Kapital verzinst wird, Z der in n Jahren entstandene Zins, $K_n = K + Z$ das Kapital mit Zins nach n Jahren, R die jährlich vom Kapital genommene oder hinzugefügte Summe (= Rente), r der Teil des Jahres, nach dem die Zinsen zum Kapital geschlagen werden, k der Diskontfaktor pro $^1/_r$ Jahr.

a) Einfacher Zins.

1. $$Z = K\frac{np}{100} \text{ und } K = \frac{100\,Z}{np}.$$

$$K_n = K\frac{100+np}{100} \text{ und } K = \frac{100\,K_n}{100+np}.$$

2. **Mittlerer Zahltermin.** Hat man die Kapitale $K_1, K_2 \cdots$ zu bezahlen nach $n_1, n_2 \cdots$ Jahresteilen, so ist der Wert dieser Kapitalien äquivalent dem Kapital $\sum K$, zahlbar nach

$$n = \frac{\sum Kn}{\sum K} \text{ Jahresteilen}$$

b) Zinseszins.

3. Wenn die Zinsen stetig zum Kapital geschlagen werden und selbst Zinsen tragen (= **stetige Verzinsung**).

$$K_n = Ke^{\frac{pn}{100}}.$$

4. Wenn die Zinsen jeden r^{ten} **Teil des Jahres** zum Kapital hinzukommen

$$K_n = Kk^{rn}, \qquad \text{wo } k = 1 + \frac{p}{100 \cdot r}.$$

5. Wenn die Zinsen **halbjährlich** zum Kapital hinzukommen

$$K_n = Kk^{2n}, \qquad \text{wo } k = 1 + \frac{p}{100 \cdot 2}.$$

6. Wenn die Zinsen **jährlich** zum Kapital hinzukommen

$$K_n^* = Kk^n, \qquad \text{wo } k = 1 + \frac{p}{100}.$$

7. Der **Barwert** K eines nach n Jahren fälligen Kapitals K_n ist bei Annahme von jährlichen Zinseszinsen

$$K = \frac{K_n}{k^n}, \qquad \text{wo } k = 1 + \frac{p}{100}.$$

c) Rentenrechnung.

8. Wird zum Kapital K am Ende eines jeden Jahres eine gleichbleibende Summe R hinzugefügt bezw. weggenommen, so ist

$$K_n = Kk^n \pm R\frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

9. Wird jährlich eine gleichbleibende Summe R zurückgelegt, so ist sie in n Jahren angewachsen zu

$$S = R\frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

10. Soll das Kapital K nach n Jahren aufgezehrt sein, so ist jährlich wegzunehmen (= n Jahre fortlaufende **Rente** aus K)

$$R = K\frac{k^n(k - 1)}{k^n - 1}.$$

11. Der **Barwert** einer n Jahre laufenden Rente R

$$B = R\frac{k^n - 1}{k^n(k - 1)}.$$

12. **Annuität.** Das Kapital K wird bei jährlicher Entnahme der Summe R, falls R größer ist als die Zinsen von K, aufgezehrt [bezw. die Schuld K wird bei jährlicher Zahlung von R **amortisiert**] sein in

$$n = \frac{\log R - \log [R - K(k - 1)]}{\log k} \text{ Jahren.}$$

§ 26. Potenzreihen.

1. **Potenzreihe** ist eine Reihe, die nach ganzen Potenzen von x fortschreitet.

$$S_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

2. Ihr **Konvergenzkriterium** ist

$$|x| < \lim_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

3. Eine Reihe mit variablen Gliedern ist in einem Bereich **gleichmäßig konvergent**, wenn sich zu einem beliebig klein gegebenem Wert ε ein Index n so finden läßt, daß der Reihenrest R_m stets kleiner bleibt als ε, unabhängig von der Wahl der Variablen innerhalb dieses Bereiches. ($m \geqq n$).

4. Innerhalb des Bereiches $|x| < \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ konvergiert die Potenzreihe S_n gleichmäßig.

5. Innerhalb des Konvergenzbereiches ist die Summe der Reihe S_n eine stetige Funktion von x.

6. Die Summe von zwei konvergenten Reihen ist wieder konvergent.

7. Die Summe oder das Produkt von zwei unbedingt konvergenten Reihen ist wieder unbedingt konvergent.

8. Das Produkt zweier konvergenter Reihen ist wieder konvergent, wenn wenigstens eine der Reihen unbedingt konvergent ist.

9. Eine Funktion von x kann stets in eine Potenzreihe entwickelt werden, aber nur in eine einzige.

10. Hat man zwei verschiedene Entwicklungen einer Funktion in Potenzreihen, so sind dieselben gliedweise identisch. Wenn also

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

und nach einer anderen Methode

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n \cdots$$

gefunden wird, so ist

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \cdots a_i = b_i .$$

11. Um f(x) in eine Reihe zu verwandeln, wird man

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

ansetzen und dann nach irgend einer Methode a_i berechnen, meist nach der **Methode der unbestimmten Koeffizienten** (Methode der vorigen Nummer).

12. **Inversion von Reihen.** Hat man y in eine nach Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandelt, also

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

so kann man x in eine nach Potenzen von y fortlaufende Reihe verwandeln, indem man setzt

$$x = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \cdots = A_0 + A_1(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) + A_2(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^2 + \cdots$$

und dann nach der Methode von 10 vergleicht.

§ 27. Rekurrente Reihen.

1. Eine rationale echt gebrochene Funktion von x läßt sich in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln, derart daß die späteren Koeffizienten der Reihe sich linear durch die vorhergehenden ausdrücken (= **Rekursion**). Diese Reihe erhält man entweder durch einfaches Ausdividieren oder nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten.

2. Die Anzahl der Koeffizienten, welche zur Berechnung der nächstfolgenden bekannt sein müssen, gibt die **Ordnung** der Reihe an. Die Ordnung der Reihe ist gleich dem Grad des Nenners der die Reihe definierenden Funktion.

3. Das **Rekursionsgesetz** heißt $a_n + B\,a_{n-1} = 0$ für die rekurrente Reihe erster Ordnung

$$\frac{A}{1 + Bx} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = A(1 - Bx + B^2x^2 - B^3x^3 + - \cdots).$$

Das Rekursionsgesetz heißt

$$a_n + B_1 a_{n-1} + B_2 a_{n-2} + \cdots + B_r a_{n-r} = 0$$

für die rekurrente Reihe r^{ter} Ordnung

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{r-1} x^{r-1}}{1 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_r x^r} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

4. Die Summe einer unendlichen rekurrenten Reihe ist stets eine rationale echt gebrochene Funktion.

5. Denkt man sich diese echt gebrochene Funktion in Partialbrüche zerlegt

$$\frac{A_0 + A_1 x + \cdots + A_{r-1} x^{r-1}}{1 + B_1 x + \cdots + B_r x^r} = \frac{C_1}{1-\gamma_1 x} + \frac{C_2}{1-\gamma_2 x} + \cdots + \frac{C_r}{1-\gamma_r x}$$

$$= C_1(1 + \gamma_1 x + \gamma_1^2 x^2 + \cdots + \gamma_1^n x^n + \cdots)$$
$$+ C_2(1 + \gamma_2 x + \gamma_2^2 x^2 + \cdots \quad \gamma_2^n x^n + \cdots)$$
$$\cdots + \cdots$$
$$+ C_r(1 + \gamma_r x + \gamma_r^2 x^2 + \cdots + \gamma_r^n x^n + \cdots),$$

so lassen sich die Koeffizienten a_i der rekurrenten Reihe durch

$$a_0 = C_1 + C_2 + \cdots + C_r = \sum C ,$$
$$a_1 = C_1\gamma_1 + C_2\gamma_2 + \cdots C_r\gamma_r = \sum C\gamma ,$$
$$\vdots$$
$$a_n = C_1\gamma_1^n + C_2\gamma_2^n + \cdots + C_r\gamma_r^n = \sum C\gamma^n$$

darstellen.

6. Die **Konvergenz**untersuchung der rekurrenten Reihe ist durch Angabe der C_i und γ_i ermöglicht. Die Reihe konvergiert, wenn

$$x < \lim_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n=\infty} \left| \frac{\sum C\gamma^n}{\sum C\gamma^{n+1}} \right| .$$

§ 28. **Binomialreihe.**

1. $(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \cdots + \binom{m}{n} x^n + \cdots$

Die Binomialreihe konvergiert für beliebiges m, wenn $|x|<1$; für $x = 1$, wenn $m > -1$; für $x = \pm 1$, wenn $m > 0$.

2. $(x + y)^n = x^n \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n = x^n \left(1 - \frac{y}{x+y}\right)^{-n}.$

3. **Näherungsformeln.**

$$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{x}{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{x}{2}, \qquad \sqrt[3]{1 \pm x} = 1 \pm \frac{x}{3},$$

wenn x klein gegen 1 ist.

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a}, \qquad \Big| \qquad \sqrt[3]{a^3 \pm b} = a \pm \frac{b}{3a^2},$$

wenn b klein gegen a ist.

4. **Wurzelziehen.** Entweder nach der vorhergehenden Nummer angenähert; oder nach folgenden Beispielen:

$$\sqrt{50} = \sqrt{49+1} = 7\sqrt{1+\tfrac{1}{49}} = 7\left(1+\frac{1}{49}\right)^{1/2};$$

$$\left(1+\frac{1}{49}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49} - \frac{1}{8}\frac{1}{49^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{49^3} - \frac{5}{128}\cdot\frac{1}{49^4} + \cdots$$

$$\sqrt[3]{120} = \sqrt[3]{125-5} = 5\sqrt[3]{1-\tfrac{1}{25}} = 5\left(1-\frac{1}{25}\right)^{1/3};$$

$$\sqrt[4]{5} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{80} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{81-1} = \frac{3}{2}\sqrt[4]{1-\tfrac{1}{81}} = \frac{\;}{2}\left(1-\frac{1}{81}\right)^{1/4}.$$

§ 29. Exponential- und logarithmische Reihen.

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

konvergiert für endliches x.

2. $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$
$= 2{,}718\,281\,828\,459 \cdots$

3. $a^x = e^{x \lg a} = 1 + \frac{x \lg a}{1!} + \frac{(x \lg a)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x \lg a)^n}{n!} + \cdots$

konvergiert für endliches x.

4. $\lg(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

konvergiert für $|x| < 1$, ebenso

$$\lg(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots \quad \text{und}$$

$$\lg\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{x} + \cdots\right].$$

5. $\lg z = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right]$

konvergiert für endliches positives z.

6. $\lg\frac{a}{b} = 2\left[\frac{a-b}{a+b} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^5 + \cdots\right]$

konvergiert für $a:b$ positiv und endlich; $a = x^2$, $b = x^2 - 1$ gibt

7. $\lg x = {}^1/_2 \lg(x^2 - 1) + R_x$;

$$R_x = \frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^5 + \cdots$$

konvergiert für endliches x.

8. **Logarithmenberechnung.** Für $x = 2$ und $x = 3$ wird die letzte Reihe

$$\lg 2 = \frac{1}{2}\lg 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7^5} + \cdots$$

$$\lg 3 = \frac{3}{2}\lg 2 + \frac{1}{17} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{17^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{17^5} + \cdots$$

und damit lg 2 und lg 3 beliebig genau.

Alle andern Logarithmen lassen sich auf lg 2 und lg 3 sowie auf die Reihe

$$R_x = \frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^5 + \cdots$$

zurückführen, z. B.

$$\lg 7 = \frac{1}{2}\lg 48 + R_7 = \frac{1}{2}\lg 3 + 2\lg 2 + R_7\,.$$

§ 30. Trigonometrische und zyklometrische Reihen.

1. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots$

und $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots$

konvergieren für endliches x.

2. $$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3\cdot 5} + \frac{17x^7}{3^2\cdot 5\cdot 7} + \cdots$$

$$= \sum_1^\infty \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}\cdot B_{2n}\, x^{2n-1}$$

und $$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2\cdot 5} - \frac{2x^5}{3^3\cdot 5\cdot 7} - \cdots$$

$$= \frac{1}{x}\left[1 - \sum_1^\infty \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n}\, x^{2n}\right]$$

konvergieren für $|x| < {}^1/_2\pi$. B_{2n} sind die Bernoullischen Zahlen (siehe arithmetische Reihen).

3. $$\sin mx = \binom{m}{1}\cos^{m-1}x\sin x - \binom{m}{3}\cos^{m-3}x\sin^3 x + \binom{m}{5}\cos^{m-5}x\sin^5 x - + \cdots$$

$$\cos mx = \cos^m x - \binom{m}{2}\cos^{m-2}x\sin^2 x + \binom{m}{4}\cos^{m-4}x\sin^4 x - \binom{m}{6}\cos^{m-6}x\sin^6 x + - \cdots$$

4. $$(-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1}\sin^m x = \cos mx - \binom{m}{1}\cos(m-2)x + \binom{m}{2}\cos(m-4)x \cdots + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{m}{2}}\binom{m}{\frac{m}{2}} \text{ für gerade } m.$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1}\sin^m x = \sin mx - \binom{m}{1}\sin(m-2)x + \binom{m}{2}\sin(m-4)x \cdots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\binom{m}{\frac{m-1}{2}}\sin x \text{ für ungerade } m.$$

$$2^{m-1}\cos^m x = \cos mx + \binom{m}{1}\cos(m-2)x + \binom{m}{2}\cos(m-4)x + \cdots + \frac{1}{2}\binom{m}{\frac{m}{2}} \text{ für gerade } m.$$

$$= \cos m x + \binom{m}{1} \cos (m-2) x + \binom{m}{2} \cos (m-4) x + \cdots$$

$$+ \cdots \binom{m}{\frac{m-1}{2}} \cos x \text{ für ungerade m.}$$

5. $$\frac{1 - x \cos \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = 1 + x \cos \alpha + x^2 \cos 2\alpha + \cdots$$

$$1 + \frac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = 1 + x \sin \alpha + x^2 \sin 2\alpha + \cdots$$

6. Über die Reihen $a_0 + a_1 x \cos \alpha + a_2 x^2 \cos 2\alpha + \cdots$

$b_0 + b_1 x \sin \alpha + b_2 x^2 \sin 2\alpha + \cdots$

siehe Fouriersche Reihe.

7. $$\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$$

$$= \sum_0^\infty \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n (2n+1)}$$

konvergiert für $|x| \leqq 1$.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

konvergiert für $|x| \lesseqgtr 1$.

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \text{ (Leibnizsche Reihe)}$$

konvergiert langsam.

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} \text{ konvergiert rasch.}$$

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2} \text{ konvergiert langsamer.}$$

D. Komplexe Zahlen.

§ 31. Allgemeine Definitionen.

1. **Definition.** i ist die Zahl, die mit sich selbst multipliziert -1 gibt.

2. $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
$i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$.

3. $a + ib$ **Normalform** oder **komplexe Form** der komplexen Zahl; auf diese Form $a + ib$, wo a und b reelle Größen sind, läßt sich jede komplexe Variable und Funktion bringen. In der **Gaussschen Zahlenebene** stellt der Punkt z die komplexe Zahl $z = a + ib$ dar. Der **Modul** $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist der **Absolutwert** von $a + ib$.

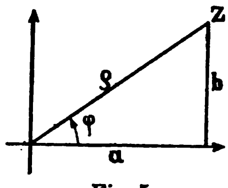


Fig. 5.

$$\varrho = |z| = |a + ib|.$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \text{ ist das } \textbf{Argument.}$$

4. Die Zahl 1 hat den Modul 1 und das Argument $2k\pi$; i hat 1 bezw. $\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$; -1 hat 1 bezw. $\pi + 2k\pi$; $-i$ hat 1 bezw. $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, k immer als ganze Zahl vorausgesetzt.

5. **Konjugiert komplexe Zahlen** sind $a + ib$ und $a - ib$; sie haben gleichen Modul, entgegengesetzt gleiches Argument.

6. Sind zwei komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ einander gleich, so gilt

$$a_2 = a_1, \quad b_2 = b_1, \quad \varrho_2 = \varrho_1, \quad \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi.$$

7. Wenn $a + ib = 0$, so ist $a = 0$, $b = 0$.

8. **Schreibweise** der komplexen Zahlen

$$a + ib = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi) = \varrho e^{\varphi i}$$
$$= \varrho[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)] = \varrho e^{(\varphi + 2k\pi)i}.$$

9. Für die komplexen Zahlen gelten dieselben Gesetze wie für die reellen; die Gesetze lassen sich für komplexe Zahlen noch erweitern.

§ 32. Summe und Differenz. Produkt und Quotient komplexer Zahlen.

1. Definition.

$$z_1 + z_2 = (a_1 + i\,b_1) + (a_2 + i\,b_2)$$
$$= (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2).$$

2. **Summensätze.**

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

3. Komplexe Zahlen werden addiert, indem man die Module graphisch addiert. (Siehe Vektoren.)

4. Wenn ϱ der Modul der Summe, so gilt

$$\varrho \leqq \varrho_1 + \varrho_2$$
$$\text{oder } |z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|.$$

Der Absolutwert (= Modul) der Summe zweier komplexer Zahlen ist kleiner oder höchstens gleich der Summe der Absolutwerte der Einzelzahlen.

5. Die Summe konjugiert komplexer Zahl ist reell.

6. Definition. $z_1 - z_2$ ist die Zahl, die zu z_2 addiert z_1 gibt.

7. Definition.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i\,b_1)\ (a_2 + i\,b_2)$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i\,(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

8. **Produktsätze.**

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$
$$(z_1 z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 z_3)$$
$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3.$$

9. $$z_1 z_2 = \varrho_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \cdot \varrho_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$
$$= \varrho_1 \varrho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Module multipliziert und ihre Argumente addiert.

10. Definition. $z_1 : z_2 = z$ ist die Zahl, die mit z_2 multipliziert z_1 gibt.

11. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\varrho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$

Komplexe Zahlen werden dividiert, indem man ihre Module entsprechend dividiert und ihre Argumente entsprechend von einander subtrahiert.

12. Das Produkt konjugiert komplexer Zahlen ist reell.

§ 33. Potenz komplexer Zahlen.

1. Definition. (n positiv und ganz und größer als 0)
$z^n = z \cdot z \cdot z \cdots z$ (n Faktoren).

2. Definition.

$$z^0 = 1. \qquad z^{-n} = 1 : z^n.$$

3. Definition. (λ und μ ganz und relativ prim)
$z^{\lambda/\mu}$ ist die Zahl, die mit μ potenziert z^λ gibt.
Schreibweise $z^{\lambda/\mu} = \sqrt[\mu]{z^\lambda}$.

4. **Moivrescher Satz.**

$$z^{\lambda/\mu} = [\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{\lambda/\mu}$$
$$= \varrho^{\lambda/\mu}\left[\cos\frac{\lambda\varphi + 2k\pi}{\mu} + i\sin\frac{\lambda\varphi + 2k\pi}{\mu}\right].$$

Speziell für ganzes n

$$z^n = [\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n$$
$$= \varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

5. Summe, Differenz, Produkt, Quotient und Potenz mit ganzzahligen Exponenten sind rationale, also eindeutige Operationen. $z^{\lambda/\mu}$ hat μ Werte; diese haben alle den gleichen Modul, ihre Argumente unterscheiden sich um $k \cdot \frac{2\pi}{\mu}$, ganzzahliges k vorausgesetzt. In der Gaussschen Ebene liegen daher die μ Werte symmetrisch auf dem Kreis um den Nullpunkt mit dem Modul $\varrho^{\lambda/\mu}$.

6. Speziell

$$\sqrt[n]{1} = \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right).$$

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin\frac{(2k+1)\pi}{n}.$$

7. Definition. Wenn die irrationale Zahl n definiert ist durch $\lim\limits_{\alpha=0}(a+\alpha) < n < \lim\limits_{\beta=0}(b-\beta)$, so ist

$$\lim_{\alpha=0} z^{a+\alpha} \lesseqgtr z^n < \lim_{\beta=0} z^{b-\beta}.$$

(Komplexe Exponenten siehe im nächsten Paragraphen.)

E. Funktionen und Gleichungen.

§ 34. Allgemeine Definitionen.

1. Eine Zahl ist entweder von unveränderlichem Wert, dann heißt sie **Konstante**; oder innerhalb bestimmter Grenzen veränderlich, dann heißt sie **Veränderliche** oder **Variable.** Meist bezeichnet man diese mit den letzten Buchstaben des Alphabets x, y, z, u, v····.

(Zu unterscheiden von der Variablen ist die **Unbekannte**, die einen konstanten, aber nicht bekannten Wert hat.)

2. **Variabilitätsbereich.** Eine Variable kann unbegrenzt variieren oder nur innerhalb gegebener Grenzen.

Die Variable x kann in dem gegebenen Bereich **kontinuierlich** oder **stetig** variieren, d. h. sie kann jeden Wert dieses Bereiches annehmen; oder sie kann **unstetig, diskontinuierlich** (= sprungweise) variieren, d. h. sie kann nicht jeden Wert des Bereiches annehmen.

3. Hängt eine Variable y von einer (oder mehreren) andern Variablen ab, so daß also jedem Wert der letzteren ein bestimmter Wert der ersteren entspricht, so heißt sie eine **Funktion** derselben.

Schreib- und Sprechweise $y = f(x)$ oder y ist eine Funktion von x, d. h. y ist abhängig von x.

x heißt die **Unabhängige**, auch **Argument**, y die **Abhängige** oder **Funktion.**

4. $y = f(x)$ heißt eine Funktion einer Unabhängigen.

$z = F(x, y)$ oder $z = \varphi(u, v, w)$ heißen Funktionen mehrerer Unabhängigen.

5. Durch die Darstellung $F(x, y) = 0$ ist im allgemeinen ebenfalls jedem Wert von x ein bestimmter Wert (oder mehrere) y zugewiesen und damit eine Funktion y von x definiert. Man nennt $F(x, y) = 0$ oder $\Phi(x, y, z) = 0$ **unentwickelte** oder **implizite** Funktionen im Gegensatz zu den **entwickelten** oder **expliziten** Funktionen $y = f(x)$ bezw. $z = \varphi(x, y)$.

Durch diese implizite Darstellung d. i. durch eine Gleichung definiert man meist die nichteinfachen Funktionen (siehe den nächsten Paragraphen).

6. $y = f(x)$ heißt eine **eindeutige** oder **mehrdeutige** Funktion, je nachdem jedem Wert x einer oder mehrere Werte y zugeordnet sind.

7. Ist y eine Funktion von x, dann auch x von y; diese Funktion nennt man die **inverse** zur ersten, z. B. $x = \arcsin y$ ist invers zu $y = \sin x$.

8. y heißt eine **stetige Funktion** von x, solange bei unendlich kleiner Änderung der Unabhängigen x auch die Abhängige y sich nur unendlich wenig ändert.

Bedingung der Stetigkeit. Die Funktion f(x) ist an der Stelle $x = x_0$ stetig, wenn dort mit verschwindend kleinem δ und ε

$$\lim_{\delta = 0,\, \varepsilon = 0} [f(x + \delta) - f(x - \varepsilon)] = 0.$$

Die Funktion f(x) ist in einem gegebenen Bereich stetig, wenn sie an jeder Stelle des Bereiches stetig ist.

9. $F(x, y \cdots)$ heißt eine **stetige Funktion** von $x, y \cdots$, solange einer unendlich kleinen Änderung der Unabhängigen $x, y \cdots$ eine unendlich kleine Änderung der Funktion entspricht.

Die Funktion $F(x, y \cdots)$ ist an der Stelle $x_0, y_0 \cdots$ stetig, wenn dort mit verschwindend kleinem δ und ε

$$\lim_{\delta = 0,\, \varepsilon = 0} [F(x + \delta, y + \delta, \cdots) - F(x - \varepsilon, y - \varepsilon, \cdots)] = 0\,.$$

10. Mit Funktionen operiert man im allgemeinen nur, solange sie endlich und stetig sind.

11. Trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die x als Abszissen, die durch die Funktion f(x) zugewiesenen y als Ordinaten auf, so wird jedes Paar dieser zusammengehörigen Größen x und y durch einen Punkt $P = x | y$ dargestellt und die stetige Funktion selbst durch eine Kurve.

12. **Einteilung der Funktionen.**

Transzendente

Algeoraische { Irrationale; Rationale { ganze; gebrochene { echt; unecht.

13. Die einfachste aller Funktionen ist die **ganze rationale**; die allgemeinste ganze rationale Funktion **m^ten Grades** von x ist

$$G_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1} x + a_m .$$

Zu einer rationalen ganzen Funktion einer oder mehrerer Variablen setzen sich die Variablen durch eine endliche Anzahl von Summen, Differenzen und Produkten zusammen. Die ganze rationale Funktion ist eindeutig und solange stetig, als sie endlich ist.

14. Zur **rationalen Funktion** (einer oder mehrerer Variablen) setzen sich die Variablen durch eine endliche Anzahl von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten zusammen.

Die rationale Funktion ist eindeutig und solange stetig, als sie endlich ist.

Jede Funktion, die sich rational aus andern stetigen Funktionen zusammensetzt, ist solange stetig, als sie endlich ist.

Die allgemeinste rationale Funktion von x ist

$$R(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1} x + b_n};$$

sie ist **echt gebrochen**, wenn $m < n$ (Grad n),
sie ist **unecht gebrochen**, wenn $m \geqq n$ (Grad m).

15. Zur **algebraischen Funktion** (einer oder mehrerer Variablen) setzen sich die Variablen durch eine endliche Anzahl von Summen, Differenzen, Produkten, Quotienten und Potenzen mit konstanten rationalen Exponenten zusammen.

16. Alle nicht algebraischen Funktionen heißen **transzendente.**

17. Eine Funktion $H(x, y, z \cdots)$ heißt **homogen**, wenn sie die Bedingung erfüllt

$$H(\varrho x, \varrho y, \varrho z \cdots) = \varrho^n H(x, y, z \cdots).$$

n ist die **Dimension** der Funktion; die Funktion ist in jedem Summanden von der n^{ten} Dimension.

$$x\frac{\partial H}{\partial x} + y\frac{\partial H}{\partial y} + z\frac{\partial H}{\partial z} + \cdots = nH(x, y, z \cdots).$$

18. Eine Funktion heißt **symmetrisch** in ihren Variablen, wenn sie sich nicht ändert bei Vertauschung derselben.

Jede symmetrische Funktion läßt sich rational und ganz durch die **symmetrischen Grundfunktionen** ausdrücken. Von $x_1, x_2, x_3 \cdots x_n$ heißen letztere

$$S_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum C_n^1.$$
$$S_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = \sum C_n^2.$$
$$S_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = \sum C_n^3.$$
$$\vdots$$
$$S_n = x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = \sum C_n^n.$$

19. Eine Funktion heißt **gerade** bezüglich der Variablen x, wenn die Vertauschung von $+x$ mit $-x$ die Funktion nicht ändert (wenn also das Vorzeichen von x belanglos ist):

$$f(-x) = f(x).$$

20. Eine Funktion heißt **ungerade** bezüglich einer Variablen, wenn die Vertauschung von $+x$ mit $-x$ nur das Vorzeichen der Funktion ändert, wenn also $f(-x) = -f(+x)$.

21. Jede Funktion befolgt ein Gesetz, durch welches sie direkt definiert werden kann **(Funktionsgesetz)**. z. B. ist der Logarithmus definiert durch $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$; die Exponentialfunktion durch $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

§ 35. Die einfachsten transzendenten Funktionen komplexer Variabler.

1. Sind die Elemente einer Reihe komplex, so hat man eine **komplexe Reihe.** Diese ist konvergent, wenn die Reihe der reellen Teile und die Reihe der imaginären für sich konvergent ist.

2. Eine komplexe Reihe ist **unbedingt konvergent,** wenn die Reihe der Moduln konvergent ist.

3. Definition.

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots$$

$$a^z = e^{z(\lg a + 2k\pi i)}.$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + - \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + - \cdots$$

4. $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \quad \Big| \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

5. $e^{2k\pi i} = 1$. $\quad | \quad e^{(2k+1)\pi i} = -1$.

$e^{(2k + 1/2)\pi i} = i$. $\quad | \quad i^i = \frac{1}{\sqrt{e^\pi}}$.

6. $e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$.

$a^z = a^{x+iy} = a^x [\cos (y \lg a) + i \sin (y \lg a)]$.

7. Definition des **Logarithmus.** $\zeta = \lg z$ ist definiert als eine Wurzel der Gleichung $e^\zeta = z$.

8. $\lg z$ hat unendlich viele Werte, von denen einer für reelle positive z reell ist, der Hauptwert. Ist z reell negativ oder überhaupt nicht reell, so sind alle Werte $\lg z$ imaginär.

$$\lg z = \lg \varrho + i (\varphi + 2k\pi).$$

$$\lg 1 = 2k\pi i. \qquad \lg (-1) = (2k + 1)\pi i.$$

$$\lg i = (2k + 1/2)\pi i.$$

9. Definition.

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \text{ und } \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

10. Definition der **hyperbolischen Funktionen** von z.

Sinus hyperbolicus von $z = \operatorname{Sin} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$.

Kosinus hyperbolicus von $z = \operatorname{Cos} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$.

Tangens hyperbolicus von $z = \operatorname{Tg} z = \frac{\operatorname{Sin} z}{\operatorname{Cos} z}$.

Kotangens hyperbolicus von $z = \operatorname{Cotg} z = \frac{\operatorname{Cos} z}{\operatorname{Sin} z}$.

11. Sin z und Cos z sind periodische Funktionen mit der Periode $2\pi i$. Sin z ist eine ungerade, Cos z eine gerade Funktion.

$$\operatorname{Cos} z + \operatorname{Sin} z = e^z. \qquad \operatorname{Cos} z - \operatorname{Sin} z = e^{-z}.$$
$$\operatorname{Cos}^2 z - \operatorname{Sin}^2 z = 1.$$

12. Tg z und Cotg z sind periodische Funktionen; ihre Periode ist πi. Tg z und Cotg z sind ungerade Funktionen.

13. Für reelle z kann Sin z jeden reellen Zahlenwert, Cos z jeden positiven reellen Zahlenwert $\geqq 1$ annehmen; Tg z bleibt stets ein echter Bruch, Cotg z stets ein unechter.

14. $\sin x = -i \operatorname{Sin} ix. \qquad \cos x = \operatorname{Cos} ix.$
$\operatorname{tg} x = -i \operatorname{Tg} ix. \qquad \operatorname{cotg} x = i \operatorname{Cotg} ix.$

15. $\sin ix = i \operatorname{Sin} x. \qquad \cos ix = \operatorname{Cos} x.$
$\operatorname{tg} ix = i \operatorname{Tg} x. \qquad \operatorname{cotg} ix = -i \operatorname{Cotg} x.$

16. $\sin(x \pm iy) = \sin x \cos iy \pm \cos x \sin iy.$
$= \sin x \operatorname{Cos} y \pm i \cos x \operatorname{Sin} y.$
$\cos(x \pm iy) = \cos x \cos iy \mp \sin x \sin iy.$
$= \cos x \operatorname{Cos} y \mp i \sin x \operatorname{Sin} y.$

17. **Regel** zur Bildung von Formeln für Hyperbelfunktionen: In den Formeln der trigonometrischen Funktionen setze man i Sin statt sin und Cos statt cos, ebenso i Tg statt tg.

18. $\operatorname{Sin} z = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$

$\operatorname{Cos} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$

19. Definition der **Kreisfunktionen.** $\zeta = \arcsin z$ ist eine Wurzel der Gleichuug $z = \sin \zeta$. Entsprechend ist $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arccotg} z$ definiert. Die Kreisfunktionen sind unendlich vieldeutig. Über **Hauptwerte** siehe Trigonometrie.

20. Wenn $2\sigma = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$,

$2\tau = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} - \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$, so ist

$\arcsin(x + iy) = (-1)^k \left[\arcsin \tau + i \lg(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})\right] + k\pi$.

$\arccos(x + iy) = \pm \left[\arccos \tau - i \lg(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})\right] + 2k\pi$.

$\operatorname{acrtg}(x + iy) = k\pi + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1 - (x^2 + y^2)} + \frac{i}{4} \lg \frac{x^2 + (1+y)^2}{x^2 + (1-y)^2}$.

21. Speziell sind die **Hauptwerte** (siehe Trigonometrie).

$\arcsin x = \frac{\pi}{2} + i \lg(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

$\arccos x = - i \lg(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + ix}{1 - ix}$.

$\arcsin iy = i \lg(y + \sqrt{1 + y^2})$.

$\arccos iy = \frac{\pi}{2} - i \lg(y + \sqrt{1 + y^2})$.

$\operatorname{arctg} iy = \frac{i}{2} \lg \frac{1 + y}{1 - y}$.

22. Definition. $\zeta = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} z$ ist eine Wurzel der Gleichung $z = \operatorname{Sin} \zeta$. Entsprechend $\operatorname{Ar} \operatorname{Cos} z \cdots$. Die Ar-Funktionen sind unendlich vieldeutig. Ihre **Hauptwerte** sind

23. $\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} z = \lg(z + \sqrt{z^2 + 1})$. $\operatorname{Ar} \operatorname{Cos} z = \lg(z + \sqrt{z^2 - 1})$.

$\operatorname{Ar} \operatorname{Tg} z = \frac{1}{2} \lg \frac{1 + z}{1 - z}$. $\operatorname{Ar} \operatorname{Cotg} z = \frac{1}{2} \lg \frac{z + 1}{z - 1}$.

§ 36. Funktionen komplexer Variabler.

1. Wenn $w = u + iv$ eine Funktion der Variabeln x, y ist, also $w = u(x, y) + iv(x, y)$, so braucht deswegen $w = u + iv$ noch keine Funktion der Größe $z = x + iy$ sein.

2. Definition. Man nennt $w = u + iv$ eine **reguläre Funktion** (oder **Funktion** schlechtweg) der Variablen $z = x + iy$ in einem bestimmten Bereich der z-Ebene, wenn in diesem Bereich u und v eindeutige und stetige Funktionen von x und y sind, ihre ersten Ableitungen nach x und y wenigstens abteilungsweise stetig sind und der Relation genügen.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

3. Die beiden Teile u und v der Funktion $w = u + iv$ genügen der **Laplaceschen Differentialgleichung**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Wegen dieser Gleichung ist dem reellen Teil u der Funktion $w = f(z)$ bis auf eine Additionskonstante ein ganz bestimmter imaginärer Teil v zugeordnet.

4. **Abbildung.** Durch die Funktion $w = f(z)$ wird (unter Zuhilfenahme der Gaussschen Darstellung komplexer Zahlen) jedem Punkt der z-Ebene ein Punkt der w-Ebene zugeordnet: Die z-Ebene wird auf die w-Ebene abgebildet. Jeder Kurve der z-Ebene entspricht eine bestimmte Kurve der w-Ebene: ihre Abbildung, jedem Flächenstück der z-Ebene ein bestimmtes Flächenstück der w-Ebene: seine Abbildung.

5. **Eigenschaft dieser Abbildung $w = f(z)$.** Diese Abbildung ist **konform** oder **winkeltreu** (isogonal): je zwei Kurven der z-Ebene schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie ihre Abbildungen in der w-Ebene; das unendlich kleine Dreieck $z_1 z_2 z_3$ der z-Ebene ist ähnlich der unendlich kleinen Abbildung $w_1 w_2 w_3$ der w-Ebene.

Hat an der untersuchten Stelle z die Ableitung $\frac{dw}{dz}$ den Modul a und das Argument α, so gibt a das Vergrößerungs-

verhältnis und α den Drehwinkel unendlich kleiner Strecken an dieser Stelle an, d. h. die Strecke ds hat in der Abbildung die Länge $a\,ds$; dreht man die Strecke ds um den Winkel α, so ist sie ihrer Abbildung parallel.

Die Konformität der Abbildung erleidet eine Unterbrechung an den Stellen, für welche $\frac{dw}{dz} = 0$ ist.

Den Axenparallelen der w-Ebene $u = \text{constans}$, $v = \text{constans}$ entspricht in der z-Ebene als Abbildung ein System von Orthogonalkurven. Dieselben teilen die z-Ebene in unendlich kleine Quadrate: sie bilden ein **isometrisches** oder **isothermes Kurvensystem.**

Man nennt die Linien $u = \text{constans}$ **Niveaulinien,** die $v = \text{constans}$ **Stromkurven** (ausgehend von der stationären wirbelfreien Strömung einer inkompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit).

§ 37. Lineare Gleichungen.

1. Eine Gleichung ist **homogen,** wenn alle Summanden bezüglich der Unbekannten gleicher Dimension sind.

Aus homogenen Gleichungen kann man nur das Verhältnis der Unbekannten ermitteln. Für ein System von n homogen auftretenden Unbekannten sind zur Ermittlung dieser Verhältnisse $n - 1$ Gleichungen notwendig.

2. Dividiert man die homogenen Gleichungen durch eine der Unbekannten und setzt für die nun auftretenden Verhältnisse der Unbekannten neue Unbekannte ein, so wird aus dem System der $n - 1$ homogenen linearen Gleichungen für n Unbekannte ein ihm äquivalentes System von $n - 1$ unhomogenen linearen Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten.

Beispiel. Aus
$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \quad \text{wird}$$

$$a_1\frac{x}{z} + b_1\frac{y}{z} + c_1 = 0, \qquad a_1\xi + b_1\eta + c_1 = 0,$$
oder
$$a_2\frac{x}{z} + b_2\frac{y}{z} + c_2 = 0 \qquad a_2\xi + b_2\eta + c_2 = 0.$$

3. Die Determinanten liefern einfache Formeln für die Lösung linearer Gleichungen. Wenn abkürzungsweise gesetzt wird die Matrix $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ für das Verhältnis der aus ihr bildbaren Determinanten (Vorzeichen je nach der Klasse), also

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

so hat man als Lösung des Systems

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{array}\right\}$$

$$x : y : z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1) : (c_1a_2 - c_2a_1) : (a_1b_2 - a_2b_1)$$

und als Lösung des Systems

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$$

$$x : y : 1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1) : (c_1a_2 - c_2a_1) : (a_1b_2 - a_2b_1).$$

4. Entsprechend ist die Lösung des Systems

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1u = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2u = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3u = 0 \end{array}\right\} x : y : z : u = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

und die des Systems

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{array}\right\} x : y : z : 1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

5. Die Bedingung für das Zusammenbestehen der drei linearen homogenen Gleichungen mit drei Unbekannten

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{array}\right\} \text{ ist } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Allgemein: Damit n homogene lineare Gleichungen mit n Unbekannten **zusammenbestehen** können („verträglich sind“), muß die Determinante des Gleichungssystems verschwinden.

6. Die Bedingung für das Zusammenbestehen der drei linearen unhomogenen Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{array}\right\} \text{ ist } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Allgemein: Damit $n + 1$ unhomogene lineare Gleichungen mit n Unbekannten zusammenbestehen können (verträglich sind), muß die Determinante des Gleichungssystems verschwinden.

7. **Resultante** zweier oder mehrerer Gleichungen ist diejenige Funktion der Koeffizienten beider Gleichungen, deren Verschwinden das Vorhandensein gemeinsamer Wurzeln (= Zusammenbestehen oder Verträglichkeit der Gleichungen) angibt.

8. Die Resultante eines Systems von n linearen homogenen Gleichungen mit n Unbekannten ist die Determinante des Gleichungssystems.

9. Die Resultante eines Systems von $n + 1$ linearen unhomogenen Gleichungen mit n Unbekannten ist die Determinante des Gleichungssystems.

§ 38.

Algebraische Gleichungen mit einer Unbekannten.

1. $f(x) = 0$ ist die allgemeinste Gleichung mit einer Unbekannten. Je nachdem die Funktion $f(x)$ transzendent oder algebraisch ist, unterscheidet man **transzendente** und **algebraische** Gleichungen.

2. Jede algebraische Gleichung $f(x) = 0$ kann so umgeformt werden, daß die linke Gleichungsseite eine rationale ganze Funktion $G_n(x)$ wird. Eine allgemeine transzendente Gleichung ist ebensowenig algebraisch lösbar wie eine allgemeine algebraische Gleichung von höherem als vom vierten Grad. Für solche Gleichungen hat man Näherungslösungen, mechanische, graphische Lösungen etc. (siehe die folgenden Paragraphen).

3. $G_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$ ist die **allgemeinste Gleichung** n^{ten} **Grades** in x. (a_0 wird von nun ab immer gleich 1 vorausgesetzt, indem man sich die Gleichung mit a_0 dividiert denkt.) Sind alle Koeffizienten reell, so nennt man die Gleichung **reell.** Diejenigen Werte von x, welche die Gleichung befriedigen, also G(x) zu Null machen, heißen **Wurzeln** der Gleichung $G(x) = 0$. Dann ist α eine Wurzel von $f(x) = 0$, wenn $f(\alpha) = 0$ wird.

4. Die **graphische Darstellung** der Gleichung $G(x) = 0$ ist eine Parabel n^{ter} Ordnung. Durch ihre Schnittpunkte mit der x-Axe sind die Wurzeln α der Gleichung bestimmt.

5. Ist α eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so ist $x - \alpha$ ein Faktor der Gleichung.

6. α ist eine **Doppelwurzel** der Gleichung $f(x) = 0$, wenn gleichzeitig $f(\alpha) = 0$ und $f'(\alpha) = 0$.

α ist eine **r-fache Wurzel** der Gleichung $f(x) = 0$, wenn gleichzeitig $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) = 0 \cdots f^{(r-1)}(\alpha) = 0$, $f^{(r)}(\alpha)$ aber von Null verschieden ist.

7. **Diskriminante** einer Gleichung ist diejenige Funktion der Gleichungskoeffizienten, deren Verschwinden das Vorhandensein einer mehrfachen Wurzel anzeigt.

8. Die Diskriminante einer Gleichung ist die Resultante der Gleichung und ihrer Ableitung.

9. **Fundamentalsatz der Algebra.** Jede Gleichung hat mindestens eine Wurzel.

10. Die Gleichung n^{ten} Grades hat n Wurzeln.

11. Die Wurzeln α_i der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

sind mit den Koeffizienten a_i verbunden durch die Relation

$$
\begin{aligned}
-a_1 &= \sum C_n^1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n . \\
+a_2 &= \sum C_n^2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \cdots \alpha_{n-1} \alpha_n . \\
-a_3 &= \sum C_n^3 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \cdots \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n . \\
&\vdots \\
(-1)^n a_n &= \sum C_n^n = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n .
\end{aligned}
$$

12. Ist $\alpha + i\beta$ eine Wurzel der Gleichung $G(x) = 0$, dann auch $\alpha - i\beta$, oder: die **imaginären Wurzeln** kommen nur paarweis konjugiert vor.

13. Eine Gleichung ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Wurzel.

14. Eine Gleichung geraden Grades, deren letztes Glied negativ ist, hat mindestens zwei reelle Wurzeln.

15. Wenn eine vollständige Gleichung nur reelle positive Wurzeln hat, so weist sie nur Zeichenwechsel auf.

16. Wenn eine vollständige Gleichung nur reelle negative Wurzeln hat, so weist sie nur Zeichenfolgen auf.

17. Eine Gleichung hat höchstens soviel positive reelle Wurzeln als Zeichenwechsel und höchstens soviel negative reelle als Zeichenfolgen (Deskartessche Zeichenregel).

18. Eine vollständige Gleichung mit reellen Wurzeln hat genau so viel positive Wurzeln, als Zeichenwechsel, und genau so viel negative, als Zeichenfolgen vorhanden sind.

19. Der **Sturm**sche **Satz** gibt 1. die Zahl aller reellen Wurzeln an, 2. schließt dieselben beliebig genau zwischen zwei Werte a und b ein.

Wenn die Gleichung $f(x) = 0$, so sind die **Sturm**schen **Funktionen** definiert: $S_1 = f(x)$, $S_2 = f'(x)$, S_3 ist der negative Rest von $S_1 : S_2$, S_4 der negative Rest von $S_2 : S_3$ etc. Die letzte Sturmsche Funktion ist eine Konstante. Da nur die Vorzeichen der Sturmschen Funktionen maßgebend sind, so kann man jede solche Funktion mit einer beliebigen positiven Zahl multiplizieren, um die Division zu vereinfachen. Der Sturmsche Satz lautet: Um die Anzahl der reellen Wurzeln zwischen a und b zu bestimmen, gebe man für die Werte a und b alle Sturmschen Funktionen an, beachte aber nur die Vorzeichen der einzelnen Funktionen. Der Überschuß der Vorzeichenwechsel bei a über die bei b gibt die Anzahl der reellen Wurzeln zwischen a und b.

Will man die Anzahl aller reellen Wurzeln der Gleichung, so wähle man $a = +\infty$ und $b = -\infty$.

20. Zwischen a und b liegt keine oder eine gerade Anzahl von Wurzeln, wenn $f(a)$ und $f(b)$ gleiches Vorzeichen haben.

21. Zwischen a und b liegt eine ungerade Anzahl von Wurzeln, also mindestens eine, wenn f(a) und f(b) ungleiches Vorzeichen haben.

22. Setzt man in die Gleichung f(x) stetig aufeinanderfolgende Werte von x ein, so wechselt sie beim Passieren einer Wurzel (ausgenommen zwei-, vier-, sechsfache etc. Wurzel) das Vorzeichen.

23. Werden in einer Gleichung $G_n(x) = 0$ die r letzten Koeffizienten Null, also

$$G_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots a_r x^r + 0 \cdot x^{r-1} + \cdots + 0 \cdot x + 0 = 0,$$

so hat sie r-mal die Wurzel Null.

24. Werden in der Gleichung $G_n(x)$ die r ersten Koeffizienten Null, also

$$G_n(x) = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \cdots + 0 \cdot x^{n-r+1} + a_r x^{n-r} + \cdots + a_n = 0,$$

so hat sie r-mal die Wurzel ∞.

25. Eine Gleichung mit fehlendem zweitem Glied $a_1 x^{n-1}$ heißt **reduziert**. Die Summe der Wurzeln einer reduzierten Gleichung ist also Null.

Soll die Gleichung $G_n(x) = 0$ reduziert werden, so substituiert man $x = y - \frac{a_1}{n}$ und erhält die neue Gleichung

$$y^n + b_2 y^{n-2} + b_3 y^{n-3} + \cdots + b_{n-1} y + b_n = 0.$$

§ 39. Binomische Gleichungen.

$x^n + a = 0$ heißt eine **binomische Gleichung.** Sie wird mit dem Moivreschen Satz gelöst. Die Gleichung hat n Wurzeln, die alle den gleichen Modul haben und einen Argumentunterschied von $k\frac{2\pi}{n}$; d. h. in der Gaussschen Zahlenebene liegen alle Wurzeln symmetrisch auf einem Kreis mit dem Radius $\varrho = |\sqrt[n]{a}|$ um den Nullpunkt.

§ 40. **Quadratische Gleichungen.**

$ax^2 + bx + c = 0$ hat als **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$. Die beiden Wurzeln der Gleichung sind

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dieselben lassen sich auch nach der Relation zwischen Wurzeln und Koeffizienten sehr oft rasch auffinden durch

$$ac = ax_1 \cdot ax_2$$
$$-b = ax_1 + ax_2.$$

$$x_1 \text{ und } x_2 \text{ sind} \begin{cases} \text{reell und verschieden für } & D > 0, \\ \text{reell und gleich für } & D = 0, \\ \text{konjugiert imaginär für } & D < 0. \end{cases}$$

§ 41. **Kubische Gleichungen.**

1. Die Gleichung $G_3(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ wird man immer zuerst so zu lösen versuchen, daß man durch Erraten oder mit der Relation zwischen Wurzeln und Koeffizienten eine Wurzel aufsucht. Hat man eine solche gefunden, etwa α, so sind die übrigen β und γ als Wurzeln einer quadratischen Gleichung bestimmt. Diese erhält man, indem man $G_3(x) = 0$ mit $x - \alpha$ dividiert. Oder man findet β und γ unmittelbar durch die Beziehungen

$$-a_1 = \alpha + \beta + \gamma,$$
$$+a_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma,$$
$$-a_3 = \alpha\beta\gamma.$$

2. Hat man die Gleichung $y^3 + a_1y^2 + a_2y + a_3 = 0$ durch die Substitution $y = x - a_1 : 3$ auf die

Form von Cardano $\quad x^3 + px + q = 0$

reduziert, so findet man eine Wurzel in der Form

$$x_1 = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}.$$

u und v sind die Wurzeln der

Resolvente $\quad y^2 + qy - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$

Die **Diskriminante** der Resolvente,

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

ist auch diejenige der Cardanischen Gleichung.

3. Dann ist eine Wurzel x_1 der Gleichung

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}};$$

die beiden andern x_2 und x_3 sind

$$x_2 = \varepsilon \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}},$$

$$x_3 = \varepsilon^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \varepsilon \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}.$$

ε und ε^2 sind die konjugiert imaginären Wurzeln von $\sqrt[3]{1}$, also

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

4. $D \begin{matrix} > \\ = 0 \\ < \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 reelle, 2 konjugiert imaginäre Wurzeln,} \\ \text{3 reelle Wurzeln, 2 sind gleich,} \\ \text{3 reelle Wurzeln in imaginärer Form.} \end{array} \right.$

5. Im letzten Fall liefert die Cardanische Formel die drei Wurzeln in imaginärer Form: **Casus irreducibilis.** In diesem Fall setzt man, wenn die Gleichung $x^3 - px \pm q = 0$,

$$\cos\varphi = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 : \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

und erhält die drei Wurzeln für $k = 0, 1, 2$ durch

$$x = \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3}$$

6. **Trigonometrische Lösung** der Cardanischen Gleichung $x^3 + px \pm q = 0$. Man setzt

$$\operatorname{cotg} 2\psi = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 : \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\psi},$$

und erhält als Lösung

$$x = \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cotg 2\varphi .$$

7. **Annäherungslösung** siehe § 44.

§ 42. Biquadratische Gleichungen.

1. $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$. Man versucht zuerst eine Lösung entsprechend den Angaben 1 des vorigen Paragraphen.

2. Hat man die Gleichung $y^4 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y + a_4 = 0$ durch die Substitution $y = x - a_1 : 4$ reduziert auf die Normalform

$$x^4 + rx^2 + sx + t = 0,$$

so findet man deren Wurzeln in der Form

$$x = \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}.$$

u, v und w sind die Wurzeln der **Resolvente**

$$y^3 + \frac{r}{2}y^2 + \frac{y}{4}\left(\frac{r^2}{4} - t\right) - \frac{s^2}{64} = 0.$$

3. Ist s positiv, dann sind die vier Wurzeln

$$x_1 = -\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}, \quad x_2 = +\sqrt{u} - \sqrt{v} + \sqrt{w},$$
$$x_3 = \sqrt{u} + \sqrt{v} - \sqrt{w}, \quad x_4 = -\sqrt{u} - \sqrt{v} - \sqrt{w}.$$

Ist s negativ, dann ist

$$x_1 = \sqrt{u} - \sqrt{v} - \sqrt{w}, \quad x_2 = -\sqrt{u} + \sqrt{v} - \sqrt{w},$$
$$x_3 = -\sqrt{u} - \sqrt{v} + \sqrt{w}, \quad x_4 = +\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}.$$

§ 43. Reziproke Gleichungen.

1. **Reziprok** heißt eine Gleichung, wenn mit a auch $1:a$ eine Wurzel ist.

2. Die symmetrischen Koeffizienten einer reziproken Gleichung sind stets gleich oder stets entgegengesetzt gleich.

3. Eine reziproke Gleichung ungeraden Grades hat entweder -1 oder $+1$ als Wurzel und kann daher durch Division mit $x + 1$ bezw. $x - 1$ um einen Grad erniedrigt werden.

4. Eine reziproke Gleichung vom Grad 2k wird durch Division mit x^k und die darauffolgende Substitution

$$x + \frac{1}{x} = y \quad \text{bezw.} \quad x - \frac{1}{x} = y$$

auf eine Gleichung vom Grad k transformiert.

§ 44. Näherungs- und graphische Lösungen.

1. Eine allgemeine Gleichung $G_n(x) = 0$ von höherem als viertem Grad läßt sich algebraisch nicht mehr lösen, ebensowenig eine allgemeine transzendente Gleichung. Numerische Gleichungen lassen sich mit Näherungsmethoden beliebig genau lösen.

2. Eine **erste Annäherung** liefert die graphische Darstellung (siehe 6) der Funktion f(x) der Gleichung f(x) = 0, oder irgend einer der § 38 angegebenen Sätze.

3. Ist der Fehler h zwischen dem Annäherungswert a und dem wahren Wert x — also x = a + h — klein genug, so liefert die **Newtonsche Näherungsformel** eine genauere Annäherung durch Angabe von

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

wenn f(x) = 0 die gegebene Gleichung ist.

4. Kennt man zwei Annäherungswerte a_1 und a_2, zwischen denen der wahre Wert x liegt, so ergibt die **„Regula falsi“** angenähert

$$x = a_1 + \frac{(a_2 - a_1)\, f(a_1)}{f(a_1) - f(a_2)}.$$

Die „Regula falsi“ ist besonders bei transzendenten Gleichungen anzuwenden.

5. **Wurzelgrenzen.** a ist eine obere (untere) Grenze der reellen Wurzeln der Gleichung f(x) = 0, wenn alle Werte $x > a$ $(x < a)$ keinen Vorzeichenwechsel mehr in f(x) hervorrufen.

6. **Graphische Lösungen** (siehe hierzu Kurvenkonstruktionen).

a) Kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Die Abszissen der drei Schnittpunkte der Kurve $y = x^2 (x + a)$ mit der Geraden $y = -bx - c$ sind die drei Wurzeln.

Ist die kubische Gleichung in der reduzierten Form $x^3 + px + q = 0$ gegeben, so kann man die drei Wurzeln auch finden als Abszissen der Schnittpunkte (den Nullpunkt ausgeschlossen) des Kreises durch den Ursprung um den Mittelpunkt $-\frac{q}{2} \Big| \frac{1-p}{2}$ [Kreisgleichung $x^2 + y^2 + qx + (p-1)y = 0$] und der Parabel $y = x^2$.

b) Biquadratische Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Die Abszissen der vier Schnittpunkte der Kurve $y = x^2 (x^2 + ax + b)$ mit der Geraden $y = -cx - d$ sind die vier Wurzeln.

Ist die biquadratische Gleichung in der reduzierten Form $x^4 + rx^2 + sx + t = 0$ gegeben, so kann man die vier Wurzeln auch finden als Abszissen der Schnittpunkte des Kreises um den Mittelpunkt $-\frac{s}{2} \Big| \frac{1-r}{2}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}\sqrt{(r-1)^2 + s^2 - 4t}$ [Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 + sx + (r-1)y + t = 0]$$

und der Parabel $y = x^2$.

c) **Beliebige Gleichung $f(x) = 0$.** Man zerlegt die linke Gleichungsseite $f(x)$ in der Form $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, dann findet man die Wurzeln als Abszissen der Schnittpunkte der Kurven $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$.

Beispiel. Die Wurzeln der Gleichung $x \sin x + (x+1)e^x = 0$ findet man als Abszissen der Schnittpunkte der Kurven $y = (x+1)e^x$ und $y = -x \sin x$.

§ 45. Simultane Gleichungen.

1. Zwei oder mehrere gleichzeitig bestehende Gleichungen für eine oder mehrere Unbekannte nennt man **simultane Gleichungen.**

2. Bestehen zwei Gleichungen für die nämliche Unbekannte simultan, so muß ihre Resultante verschwinden (siehe lineare Gleichungen). Die beiden Gleichungen haben dann einen in der Unbekannten mindestens linearen Faktor gemeinsam.

3. Die **Resultante zweier Gleichungen** ist das Eliminationsresultat der Unbekannten aus beiden Gleichungen.

4. Die Resultante zweier Gleichungen findet man nach 2. entweder als letzten konstanten Rest der fortgesetzten Division beider Gleichungen bezw. ihrer Reste (nach der Methode der Aufsuchung eines gemeinschaftlichen Teilers) oder nach der **Sylvesterschen Methode** (siehe lineare Gleichungen). Man multipliziert jede der beiden Gleichungen $f(x) = 0$ und $\varphi(x) = 0$ mit x, x^2, $x^3 \cdots$ und setzt $x^2 = y$, $x^3 = z \cdots$, bis man eine Gleichung mehr als Unbekannte hat. Dann ist die Resultante der beiden simultanen Gleichungen die Determinante des neu erhaltenen Gleichungssystems.

Beispiel. Die Resultante von $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ \alpha x^3 + \beta x + \gamma = 0 \end{cases}$

ist auch die Resultante von

$$\left.\begin{array}{l} ay + bx + c = 0 \\ \alpha z + \beta x + \gamma = 0 \\ az + by + cx = 0 \\ \alpha u + \beta y + \gamma x = 0 \\ au + bz + cy = 0 \end{array}\right|, \text{ d. i. } \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & a & b & c & 0 \\ \alpha & 0 & \beta & \gamma & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Die Resultante der zwei Gleichungen m^{ten} Grades

$$\left.\begin{array}{l} a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = 0 \\ b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m = 0 \end{array}\right\}$$

wird erhalten als Resultante der zwei Gleichungen $m - 1^{\text{ten}}$ Grades

$$x^{m-1}(b_0a_1 - a_0b_1) + x^{m-2}(b_0a_2 - a_0b_2) + \cdots \cdots$$
$$+ x(b_0a_{m-1} - a_0b_{m-1}) + (b_0a_m - a_0b_m) = 0.$$
$$x^{m-1}(a_0b_m - b_0a_m) + x^{m-2}(a_1b_m - b_1a_m) + \cdots \cdots$$
$$+ x(a_{m-2}b_m - b_{m-2}a_m) + (a_{m-1}b_m - b_{m-1}a_m) = 0.$$

6. Die Resultante der zwei Gleichungen zweiten Grades

$$\left.\begin{array}{l} A_0x^2 + A_1x + A_2 = 0 \\ B_0x^2 + B_1x + B_2 = 0 \end{array}\right\}$$

ist die Resultante der zwei linearen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x(B_0A_1 - A_0B_1) + (B_0A_2 - A_0B_2) = 0 \\ x(A_0B_2 - B_0A_2) + (A_1B_2 - B_1A_2) = 0 \end{array}\right\},$$

d. i. deren Determinante

$$(A_0B_1 - B_0A_1)(A_1B_2 - B_1A_2) - (A_2B_0 - B_2A_0)^2.$$

7. Die Lösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y ergibt sich im allgemeinen als Lösung der Resultante der beiden Gleichungen für x, wenn man y als bekannte Größe betrachtet. Diese Resultante ist im allgemeinen vom $m \cdot n^{\text{ten}}$ Grad, falls die erste der beiden Gleichungen vom m^{ten}, die zweite vom n^{ten} Grad in den Unbekannten war. Das Gleichungspaar hat $m \cdot n$ Wertepaare als Lösungen.

Beispiel. $$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \\ b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0 \end{array}\right.$$

oder $$\left\{\begin{array}{l} A_0x^2 + A_1x + A_2 = 0 \\ B_0x^2 + B_1x + B_2 = 0 \end{array}\right.$$

hat als Resultante

$$R = (A_0B_1 - B_0A_1)(A_1B_2 - B_1A_2) - (A_2B_0 - B_2A_0)^2.$$

$R = 0$ ist (nach Substitution der A_i und B_i) eine Gleichung vierten Grades in y.

§ 46. Partialbruchzerlegung.

1. Ein **Partialbruch** ist eine echt gebrochene rationale Funktion von möglichst niederm Grad.

2. Jede echt gebrochene rationale Funktion läßt sich in eine Summe von Partialbrüchen zerlegen.

3. $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ läßt sich, falls $(x - x_\mu)^m$ ein Faktor von $f(x)$ ist, zerlegen in

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_\mu}{(x - x_\mu)^m} + F(x).$$

4. Um eine unecht gebrochene rationale Funktion möglichst zu vereinfachen, zerlege man sie in eine ganze und eine echt gebrochene rationale Funktion als Summanden.

5. Jede Funktion

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta \cdots}$$

kann man sich entstanden denken dadurch, daß man die Summe

$$\frac{A_\alpha}{(x - x_1)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x - x_1)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x - x_1}$$
$$+ \frac{B_\beta}{(x - x_2)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x - x_2)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x - x_2} + \cdots$$

auf den gemeinsamen Nenner $(x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta \cdots$ gebracht hat.

6. Um $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ in Partialbrüche zu zerlegen, wird man zunächst f(x) in seine Faktoren zerlegen. Je nachdem diese Faktoren alle reell oder einige imaginär sind, ob sie alle verschieden oder einige auch gleich sind, unterscheidet man folgende Fälle:

Ia alle Faktoren sind reell und verschieden,
Ib alle Faktoren sind reell, einige auch gleich,
II einige Faktoren sind imaginär.

7. **Fall Ia:** Alle Faktoren von f(x) sind reell und verschieden.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}$$
$$= \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \frac{A_3}{x - x_3} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}.$$

Zur Bestimmung der A_μ ist die einfachste Methode folgende: Man multipliziert die beiden Gleichungsseiten mit $x - x_\mu$ und setzt dann $x = x_\mu$; man erhält

$$A_\mu = \frac{\varphi(x_\mu)}{(x_\mu - x_1)\cdots(x_\mu - x_{\mu-1})(x_\mu - x_{\mu+1})\cdots(x_\mu - x_n)}$$

$$= \frac{\varphi(x_\mu)}{f'(x_\mu)}.$$

8. **Fall Ib:** Alle Faktoren sind reell, einzelne sind gleich.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta \cdots (x - x_n)(x - x_{n+1})\cdots}$$

$$= \frac{A_\alpha}{(x - x_1)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x - x_1)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \frac{A_1}{x - x_1}$$

$$+ \frac{B_\beta}{(x - x_2)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x - x_2)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \frac{B_1}{x - x_2}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{K}{x - x_n} + \frac{L}{x - x_{n+1}} + \cdots$$

Zur Bestimmung von A_α, B_β, C, D···· d. i. derjenigen Zähler, deren Nenner in der höchsten Potenz vorkommt, verwendet man am einfachsten die oben angegebenen Methode. Die Zähler $A_{\alpha-\mu}$, $B_{\beta-\mu}$ lassen sich nach dieser Methode nicht unmittelbar bestimmen. Erst wenn man die Partialbrüche mit bekannten Zählern A_α, B_β·· auf die linke Seite geschafft und dort vereinfacht hat, läßt sich diese Methode neuerdings zur Ermittlung von $A_{\alpha-1}$, $B_{\beta-1}$·· anwenden. Andere Methoden siehe 10.

9. **Fall II:** Einzelne der Faktoren sind konjugiert imaginär.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x + a + ib)(x + a - ib)(x + c + id)(x + c - id)\cdots}$$

$$= \frac{A}{x + a + ib} + \frac{B}{x + a - ib} + \frac{C}{x + c + id} + \frac{D}{x + c - id} + \cdots$$

Zur Ermittlung der (imaginären) Zähler A, B, C, D···· verwendet man wieder die in 7. angegebene Methode. Man erhält dann die Partialbrüche in komplexer Form, die man nach den Sätzen des § 35 in reeller Form zusammenfassen kann.

Oder man will von vornherein jede imaginäre Zahl vermeiden, dann setzt man

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{Px + Q}{(x+a)^2 + b^2} + \frac{Sx + T}{(x+c)^2 + d^2} + \cdots\cdot$$

$$\text{wo } (x+a)^2 + b^2 = (x + a + ib)(x + a - ib),$$
$$(x+c)^2 + d^2 = (x + c + id)(x + c - id), \cdots\cdot$$

und ermittelt P, Q, S, T···· nach einer der folgenden Methoden.

10. **Allgemeine Methoden** der Ermittlung der Partialbruchzähler.

a) Methode der unbestimmten Koeffizienten. Man multipliziert beiderseits mit dem Generalnenner sämtlicher Partialbrüche (§ 26. 10).

b) Die Gleichung

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_\alpha}{(x - x_a)^\alpha} + \cdots\cdot + \frac{K}{x - x_k} + \cdots\cdot$$

ist eine Identität, die also für jeden Wert von x gilt; man kann sich beliebig viele Gleichungen zur Ermittlung der unbekannten Zähler verschaffen, wenn man $x = 0, 1, -1, 2, -2$ usw. setzt (am besten nur in Verbindung mit der Methode 7. anzuwenden, wo diese nicht ausreicht).

§ 47. Interpolation.

1. **Interpolieren** heißt zu zwei gegebenen Systemen von Unabhängigen (= Argumenten) und ihnen zugeordneten abhängigen Größen (= Funktionswerten) angenähert den algebraischen Zusammenhang beider Systeme aufstellen und daraus für einen weitern gegebenen Argumentwert den zugehörigen Funktionswert aufsuchen.

2. **Graphische Interpolation.** Kennt man die wahre Abhängigkeit der gegebenen Werte, d. h. kann man die Abhängigkeit durch eine Funktionsgleichung darstellen, so läßt sich dieselbe in rechtwinkligen Koordinaten durch eine Kurve darstellen. Dieselbe Kurve kann man aber angenähert beliebig genau je nach der Anzahl der vorgenommenen Messungen durch diese Messungsergebnisse selbst wiedergeben. Zu einem weitern gegebenen Argumentwert als Abscisse findet man dann graphisch den zugehörigen Funktionswert als Ordinate.

3. **Methode der Proportionalteilung.** Sind die Beobachtungen für den geforderten Zweck hinreichend eng an einander gereiht, so kann man den Bogen zwischen zwei Punkten der Kurve durch eine Gerade ersetzen. Man nimmt also an, daß die Funktion in dem durch die beiden Punkte gegebenen Intervall proportional variiert. (Interpolation bei schon vorhandenen genaueren Tabellen: **Partes proportionales**).

4. Aufsuchen der Funktion in **rationaler ganzer Form.**

a) Man setzt $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$, falls man für n Argumente x_i die zugehörigen Funktionswerte y_i hat, und ermittelt aus den n Gleichungen

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_{n-1} x_i^{n-1},$$

die n Koeffizienten $a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$.

b) **Newtonsche Interpolationsmethode:** falls die Argumente x_i eine arithmetische Reihe erster Ordnung

$$x_0, \; x_1 = x_0 + \alpha, \; x_2 = x_0 + 2\alpha, \; \cdots \; x_n = x_0 + n\alpha$$

bilden, präsentiert sich die gesuchte Funktion als eine arithmetische Reihe n^{ter} Ordnung

$$y = y_0 + \frac{x - x_1}{1!\alpha} \Delta y_0 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2!\alpha^2} \Delta^2 y_0 + \cdots \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_n)}{n!\alpha^n} \Delta^n y_0 .$$

$\Delta^k y_0$ ist das Anfangsglied der k^{ten} Differenzenreihe der Hauptreihe

$$y_0, \; y_1, \; y_2 \; \cdots \; y_n .$$

c) **Lagrangesche Interpolationsmethode** für zwei beliebige Reihen von Argumenten x_i und Abhängigen y_i. Zu einem beliebigen x findet man das zugehörige y nach

$$y = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} y_i$$

$$= \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f(x)}{x - x_i} \cdot \frac{y_i}{f'(x_i)},$$

wenn man $f(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$ setzt.

IV. Elemente der Differentialrechnung.

§ 48. Unendlich kleine und unendlich große Werte.

1. Unendlich klein heißt eine Größe, wenn sie als Grenzwert Null hat; oder in anderer Ausdrucksweise: wenn sie gegen Null konvergiert. Unendlich klein und Null sind also zu unterscheiden: der Unterschied zwischen beiden ist kleiner als jede angebbare Größe.

2. Sind α und β zwei unendlich kleine Größen und ist $\lim \frac{\alpha}{\beta}$ eine endliche, von Null verschiedene Zahl, so nennt man α und β von gleicher Ordnung; ist $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, so heißt α unendlich klein höherer Ordnung als β; ist $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, so heißt α von niedrigerer Ordnung.

3. Ist $\lim \frac{\alpha}{\beta^n}$ eine endliche von Null verschiedene Größe, so sagt man, α ist von der n^{ten} Ordnung unendlich klein gegenüber β.

4. Wenn α unendlich klein oder unendlich groß ist, so ist $a\alpha$ von derselben Ordnung unendlich klein bezw. unendlich groß, falls a eine endliche von Null verschiedene Zahl ist.

5. Die Summe einer endlichen Zahl unendlich kleiner Summanden ist ebenfalls unendlich klein und zwar von derselben Ordnung wie der Summand niedrigster Ordnung.

6. Der Grenzwert der Summe der unendlich kleinen α_i ändert sich nicht, wenn man zu jedem α_i noch eine unendlich kleine Größe ε_i höherer Ordnung als α_i hinzufügt.

§ 49. Ableitung reeller Funktionen einer Variablen.

1. Ändert sich die Unabhängige (= Argument) x um Δx, so wird sich im allgemeinen die Abhängige oder Funktion $y = f(x)$ um einen Betrag $\Delta y = \Delta f(x)$ ändern. Ist die Änderung Δx der Unabhängigen x unendlich klein, so wird es im allgemeinen auch die Änderung Δy der Funktion sein.

2. Die unendlich kleinen Änderungen von x und y heißen **Differentiale** (im Gegensatz zu den endlichen, den **Differenzen**).

3. **Differenzenquotient** ist das Verhältnis der Funktionsänderung Δy zur entsprechenden Argumentänderung Δx.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ oder } \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

4. **Differentialquotient** ist das Verhältnis der unendlich kleinen Funktionsänderung $dy = df(x)$ zur entsprechenden unendlich kleinen Argumentänderung dx.

5. Solange die Funktion $f(x)$ endlich und stetig ist, hat sie immer einen Differentialquotient.

6. **Ableitung** oder **Derivirte** $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist der Grenzwert des Differenzenquotienten, falls Δx unendlich klein wird.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

7. Der Differentialquotient einer Funktion ist gleich der Ableitung dieser Funktion. Die gegebene Funktion heißt **Stammfunktion.**

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

8. Verschiedene **Schreibweisen** für $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx} = y'.$$

9. **Geometrische Deutung** der Ableitung $f'(x)$. Sie ist gleich der Richtung der durch $y = f(x)$ dargestellten Kurve an der Stelle x (siehe Kurvendiskussion),

$$f'(x) = \operatorname{tg} \tau .$$

10. Das **Differential einer Funktion** ist gleich der Ableitung der Funktion multipliziert mit dem Differential der Unabhängigen,

$$d f(x) = f'(x) \cdot dx .$$

11. Die Ableitung einer **Additionskonstanten** ist Null.

$$\frac{d[f(x) + C]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \qquad d[f(x) + C] = df(x)$$

$$\frac{dC}{dx} = 0 \qquad dC = 0$$

12. Eine **Multiplikationskonstante** bleibt beim Differenzieren erhalten.

$$\frac{d[Cf(x)]}{dx} = C\frac{df(x)}{dx} \qquad d[Cf(x)] = Cdf(x).$$

13. Eine **Summe** wird differenziert, indem man jeden Summanden differenziert. Wenn u eine Abkürzung für $u(x)$, v für $v(x)$, entsprechend u' für $u'(x)$ und v' für $v'(x)$,

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = u' + v' \qquad d(u+v) = du + dv.$$

14. Ableitung eines **Produktes.**

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} = vu' + uv' \qquad d(uv) = vdu + udv$$

$$\frac{d(uvw)}{dx} = u'vw + v'wu + w'uv \qquad d(uvw) = vwdu + wudv + uvdw.$$

15. Ableitung eines **Quotienten.**

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{vu' - uv'}{v^2} \qquad d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

16. Ableitung der **Funktion einer Funktion.** Ist y eine Funktion von u und u eine Funktion von x, so ist die Ableitung von y nach x gleich dem Produkt der Ableitung von y nach u mal der Ableitung von u nach x.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

17. Eine im Intervall $a \leq x \leq b$ konvergente Potenzreihe für x gibt in diesem Intervall differenziert wieder eine konvergente Reihe. Die Reihe wird differenziert, indem man gliedweise jeden Summanden differenziert.

18. **Ableitung spezieller Funktionen.**

$$\frac{dx^m}{dx} = m x^{m-1}. \qquad dx^m = m x^{m-1} dx.$$

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

$$\frac{d\frac{1}{x}}{dx} = -\frac{1}{x^2}. \qquad d\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}.$$

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x. \qquad d\sin x = \cos x\, dx.$$

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x. \qquad d\cos x = -\sin x\, dx.$$

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\, x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad d\,\mathrm{tg}\, x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$\frac{d\,\mathrm{cotg}\, x}{dx} = \frac{-1}{\sin^2 x}. \qquad d\,\mathrm{cotg}\, x = \frac{-dx}{\sin^2 x}.$$

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \lg a. \qquad da^x = a^x \lg a\, dx.$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x. \qquad de^x = e^x dx.$$

$$\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\frac{d\arccos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad d\arccos x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}. \qquad d \operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$\frac{d \operatorname{arc cotg} x}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}. \qquad d \operatorname{arc cotg} x = \frac{-dx}{1+x^2}.$$

$$\frac{d \lg x}{dx} = \frac{1}{x}. \qquad d \lg x = \frac{dx}{x}.$$

$$\frac{d \overset{a}{\log} x}{dx} = \frac{1}{x \lg a}. \qquad d \overset{a}{\log} x = \frac{dx}{x \lg a}.$$

$$\frac{d \operatorname{Sin} x}{dx} = \operatorname{Cos} x. \qquad d \operatorname{Sin} x = \operatorname{Cos} x \, dx.$$

$$\frac{d \operatorname{Cos} x}{dx} = \operatorname{Sin} x. \qquad d \operatorname{Cos} x = \operatorname{Sin} x \, dx.$$

$$\frac{d \operatorname{Tg} x}{dx} = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x}. \qquad d \operatorname{Tg} x = \frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x}.$$

$$\frac{d \operatorname{Cotg} x}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 x}. \qquad d \operatorname{Cotg} x = -\frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x}.$$

$$\frac{d u^v}{dx} = u^v \left[\frac{v}{u} u' + v' \lg u\right]. \qquad d u^v = u^v \left[\frac{v}{u} u' + v' \lg u\right] dx.$$

18. Ist die Funktion y in **impliziter Form** gegeben, oder in der **Parameterdarstellung** (Simultandarstellung), so erhält man die Ableitung nach § 50 und 51.

§ 50. Ableitung reeller Funktionen mehrerer Variabler.

1. **Partielle Ableitung.** Die Darstellung $z = f(x, y)$ macht z von den beiden Variablen x und y abhängig. Einer Änderung nur von x entspricht eine partielle Änderung von z, ebenso einer Änderung nur von y eine (natürlich andere) partielle Änderung von z.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y = 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

5. **Höhere partielle und totale Ableitungen von Funktionen mehrerer Variabler.**

a) gegeben $z = f(x, y)$; es bezeichnet

$$f_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x}. \qquad f_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial f_2}{\partial y}.$$

$$f_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} \quad = \quad f_{21} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Dann ist $dz = f_1\, dx + f_2\, dy$;

$$d^2 z = f_{11}\, dx^2 + 2 f_{12}\, dx\, dy + f_{22}\, dy^2$$
$$= [f_1\, dx + f_2\, dy]^{(2)} \text{ symbolisch}$$

$d^n z = [f_1\, dx + f_2\, dy]^{(n)}$ symbolisch, d. h. nach Ausführung der Potenzoperation lese man die Produkte $f_1^p f_2^{n-p}$ als Produkte von Differentialquotienten, z. B. f_1^2 als f_{11}, $f_1^2 f_2$ als f_{112} etc.

b) gegeben $u = F(x, y, z)$; wenn bezeichnet

$$F_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial F_1}{\partial x} \text{ etc.}$$

dann ist $F_{12} = F_{21}$, $F_{13} = F_{31}$, $F_{23} = F_{32}$ etc.

$$d^n F = [F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz]^{(n)} \text{ symbolisch.}$$

c) gegeben $F(x, y) = 0$; dann ist

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1}{F_2}.$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F_1^2 F_{22} - 2 F_1 F_2 F_{12} + F_2^2 F_{11}}{F_2^3}.$$

d) gegeben $F(x, y, z) = 0$; z kann als Funktion $z = f(x, y)$ von x und y dargestellt gedacht werden; man erhält die partiellen Ableitungen f_1 und f_2 aus

$$F_1 + F_3 f_1 = 0, \qquad F_2 + F_3 f_2 = 0$$

und hieraus f_{11}, f_{12}, f_{22}.

6. **Eulers Satz** über homogene Funktionen. Ist $F(x, y, z \cdots)$ homogen in den Variabeln und von k^{ter} Dimension, so ist

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} + \cdots = k F(x, y, z \cdots)$$

7. Höhere Ableitungen **simultan gegebener Funktionen.** Sind x und y Funktionen der nämlichen Unabhängigen t, also $x = u(t)$, $y = v(t)$, so wird

$$dx = \frac{du(t)}{dt} dt = u' dt \quad \text{und} \quad dy = v' dt.$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{v'}{u'}. \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{u'v'' - v'u''}{(u')^3}.$$

8. Höhere Ableitungen **invers gegebener Funktionen.** Ist x als Funktion von y dargestellt, so ist

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}. \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dx}{dy}\right)^3.$$

§ 52. Taylorsche und Mac-Laurinsche Reihe.

(siehe hierzu Reihenlehre).

1. **Erster Mittelwertsatz** der Differentialrechnung. Ist f(x) im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_0 + h$ endlich und derivierbar, so gibt es in diesem Intervall einen Punkt der durch $y = f(x)$ dargestellten Kurve, in dem die Tangente mit der Sekante durch die Endkurvenpunkte des Intervalles gleiche Richtung hat. Wenn $0 \leqq \Theta \leqq 1$, so ist

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h \cdot f'(x_0 + \Theta h).$$

2. **Zweiter Mittelwertsatz** der Differentialrechnung. Sind f(x) und F(x) im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_0 + h$ endlich und derivierbar und wird die Ableitung F'(x) in diesem Intervall nicht Null, so gilt für $0 \leqq \Theta \leqq 1$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{F(x_0 + h) - F(x_0)} = \frac{f'(x_0 + \Theta h)}{F'(x_0 + \Theta h)}.$$

3. Erste Form der **Taylorschen Reihe.** Sind die n ersten Ableitungen von $f(x)$ im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_0 + h$ stetig und endlich, so gilt

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + R,$$

$$R = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \Theta h) \cdots (0 \leqq \Theta \leqq 1).$$

Die Reihe ist konvergent, wenn $\lim_{n=\infty} R = 0$ ist im angebenen Intervall.

4. Die Ableitung einer innerhalb eines bestimmten Gebietes konvergenten Reihe ist in diesem Gebiet wieder konvergent.

5. Zweite Form der **Taylorschen Reihe.**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots$$
$$+ \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R,$$

$$R = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)} [x_0 + \Theta(x - x_0)].$$

Die Reihe ist nach steigenden Potenzen von $x - x_0$ geordnet, wobei x_0 beliebig. Setzt man $x_0 = 0$, so hat man die

6. **Mac-Laurinsche** oder **Sterlingsche Reihe.**

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R,$$

$$R = \frac{x^{n+1}}{(n+)!} f^{(n+1)} [\Theta x].$$

7. **Taylorsche Reihe für zwei Variable.**

Erste Form.

$$F(x+h, y+k) = F(x,y) + \frac{1}{1!}[F_1 h + F_2 k]$$
$$+ \frac{1}{2!}[F_1 h + F_2 k]^{(2)} + \cdots + \frac{1}{n!}[F_1 h + F_2 k]^{(n)} + R,$$

$$R = \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial F(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial x} h + \frac{\partial F(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial y} k\right]^{(n+1)}$$

in symbolischer Form (siehe § 51,5).

Zweite Form.

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}[(x - x_0) F_1 + (y - y_0) F_2]$$
$$+ \frac{1}{2!}[(x - x_0) F_1 + (y - y_0) F_2]^{(2)}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ \frac{1}{n!}[(x - x_0) F_1 + (y - y_0) F_2]^{(n)} + R \text{ symbolisch.}$$

F_1, F_2, F_{11} usw. sind in der **zweiten Form** die partiellen Ableitungen an der Stelle x_0, y_0, also Konstante.

8. **Taylorsche Reihe für drei Variable** (zweite Form).

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{1!}[(x - x_0) F_1 + (y - y_0) F_2 + (z - z_0) F_3]$$
$$+ \frac{1}{2!}[(x - x_0) F_1 + (y - y_0) F_2 + (z - z_0) F_3]^{(2)}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ \frac{1}{n!}[(x - x_0) F_1 + (y - y_0) F_2 + (z - z_0) F_3]^{(n)} + R$$

symbolisch. F_1, F_2, F_3, F_{11} usw. sind wieder die partiellen Ableitungen an der Stelle x_0, y_0, z_0, also Konstante.

§ 53. Unbestimmte Formen.

1. $\frac{0}{0}$. Ist für $x = a$ sowohl $f(x)$ wie $\varphi(x)$ Null, so nimmt $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Dann erhält man den Wert dieses Bruches nach

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} .$$

Nimmt auch $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ die Form $\frac{0}{0}$ an, so wiederholt man das Verfahren, also

$$\lim_{x=a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x=a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ etc.}$$

2. $\frac{\infty}{\infty}$. Nimmt $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$ an, so verfährt man wie bei 1.

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \text{ etc.}$$

3. $0 \cdot \infty$. Wenn $f(x) \cdot \varphi(x)$ für $x = a$ die Form $0 \cdot \infty$ annimmt, so mache man $\varphi(x) = \frac{1}{1/\varphi(x)} = \frac{1}{\psi(x)}$; dann wird $\frac{f(x)}{\psi(x)}$ aus $f(x) \cdot \varphi(x)$, also Formel 1 anzuwenden sein.

4. $\infty - \infty$. Wenn $f(x) - \varphi(x)$ für $x = a$ die Form $\infty - \infty$ annimmt, so verwandle man durch die Substitution $f(x) = \frac{1}{F(x)}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\Phi(x)}$ die Differenz $f(x) - \varphi(x)$ in den Quotienten $\frac{\Phi(x) - F(x)}{F(x) \cdot \Phi(x)}$ und wende Formel 1 an.

5. 0^0, ∞^0, 1^∞. Durch Logarithmieren werden diese Ausdrücke auf die vorhergehenden Fälle zurückgeführt. Ist z. B. $f(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$, so wird $G = f(x)^{\varphi(x)}$ für $x = a$ die Form 0^0 annehmen, also $\lg G = \varphi(x) \cdot \lg f(x)$ die Form $0 \cdot \infty$. Man bestimmt $\lim \lg G = \lg \lim G$ nach 3., alsdann $\lim G$ durch Delogarithmieren.

6. Die Funktionen e^x, x^n, $\lg x$ werden für $x = \infty$ auch unendlich und zwar in dieser Reihenfolge, d. h. e^x wird für große Werte von x viel eher groß als x^n oder gar $\lg x$.

§ 54. **Maxima und Minima.**

1. $y = f(x)$ erreicht ein Extremum, wenn $f'(x) = 0$, und zwar ein

$$\left.\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\} \text{wenn } f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) \lessgtr 0.$$

Ist $f''(x) = 0$, so ist Bedingung für den Eintritt eines extremen Funktionswertes $f'''(x) = 0$; dann entscheidet $f^{(4)}x$ entsprechend statt $f''(x)$ usw.

$y = \frac{u(x)}{v(x)}$ erreicht ein.

$$\left.\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}\text{für } vu' - uv' = 0 \text{ und } vu'' - uv'' \lessgtr 0.$$

$y = \frac{1}{v(x)}$ erreicht ein

$$\left.\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}\text{für } v' = 0 \text{ und } -v'' \lessgtr 0.$$

2. **F(x, y) = 0.** y erreicht ein Extremum für jene Wertepaare x, y, für welche $F_1 = 0$ nebst $F = 0$, und zwar ein

$$\left.\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}\text{für } -\frac{F_{11}}{F_2} \lessgtr 0.$$

3. $\left.\begin{matrix}x = u(t)\\ y = v(t)\end{matrix}\right\}$. y erreicht ein Extremum für jene Werte t, für welche $v' = 0$ und zwar ein

$$\left.\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}\text{wenn } \frac{v''}{u'^2} \lessgtr 0.$$

4. **z = f(x, y).** Die Werte von x und y, die einen extremen Wert von z ergeben, sind bestimmt durch die zwei Gleichungen $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ unter der Bedingung, daß $f_{11} f_{22} - f_{12}^2 > 0$; man hat ein

$$\left.\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}\text{wenn } f_{11} \text{ und } f_{22} \text{ beide} \lessgtr 0.$$

5. **Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.** Ist für das Bestehen eines Extremums der Funktion $U = F(x, y, z)$ das Mitbestehen der Gleichungen $G(x, y, z) = 0$ und $H(x, y, z) = 0$ Bedingung, so hat man, wenn willkürlich unter Einführung von zwei Faktoren λ und μ

$$v = F + \lambda G + \mu H \text{ gesetzt wird,}$$

folgende fünf Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= F_1 + \lambda G_1 + \mu H_1 = 0, \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= F_2 + \lambda G_2 + \mu H_2 = 0, \\
\frac{\partial v}{\partial z} &= F_3 + \lambda G_3 + \mu H_3 = 0, \\
G = 0, &\qquad H = 0
\end{aligned}\right\}$$

für die zwei Hilfsgrößen λ, μ und die drei Bestimmungsgrößen x, y, z des extremen Wertes U.

Allgemeine Aufgabe. Ist für das Bestehen eines extremen Wertes der Funktion $U = F(x_1, x_2, x_3 \cdots x_{n+k})$ das Mitbestehen der k Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
G_1(x_1, x_2, \cdots x_{n+k}) &= 0, \\
\cdots\cdots & \\
G_k(x_1, x_2, \cdots x_{n+k}) &= 0
\end{aligned}\right\}$$

Bedingung, so hat man, wenn willkürlich unter Einführung von k Faktoren λ_1, $\lambda_2 \cdots \lambda_k$

$$v = F + \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \cdots \lambda_k G_k$$

gesetzt wird, folgende $n + 2k$ Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x_1} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial x_1} = 0, \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
\frac{\partial v}{\partial x_{n+k}} &= \frac{\partial F}{d x_{n+k}} + \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial x_{n+k}} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial x_{n+k}} = 0, \\
G_1 = 0, &\qquad G_2 = 0, \cdots G_k = 0
\end{aligned}\right\}$$

zur Bestimmung der k eingeführten Hilfsfaktoren λ_1, $\lambda_2 \cdots \lambda_k$ und der $n + k$ Bestimmungsgrößen $x_1, x_2, \cdots x_{n+k}$ des extremen Wertes U.

V. Elemente der Integralrechnung.

§ 55. **Bestimmtes und unbestimmtes Integral.**

1. f(x) sei eine im Bereich von $x = a$ bis $x = b$ endliche und stetige Funktion. Teilt man diesen Bereich in n Teile δ und nimmt f(x) in den einzelnen Teilbereichen δ_i den Wert f_i an, so nennt man den Ausdruck

$$\lim_{n=\infty} \sum_1^n f_i \delta_i,$$

falls man die Teilbereiche unendlich klein, also n unendlich groß werden läßt, das **bestimmte Integral** der Funktion f(x) zwischen den Grenzen a und b und schreibt dafür

$$\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{oder} \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx.$$

a nennt man die **untere,** b die **obere Grenze.**

Geometrisch läßt sich das bestimmte Integral $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ deuten als die durch die Kurve $y = f(x)$, die x-Axe und die Grenzordinaten $x = a$ und $x = b$ eingeschlossene Fläche.

2. **Uneigentliche bestimmte Integrale.** Wird die Funktion im Bereich $a \leq x \leq b$ unendlich oder ist eine der Grenzen unendlich groß, so ist das bestimmte Integral von a bis b aus f(x) definiert:

a) Wenn $b = \infty$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\omega=\infty} \int_a^\omega f(x)\,dx.$$

b) Wenn $f(b) = \infty$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta=0} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx.$$

c) Wenn für $x = x_1$ im geg. Intervall $f(x_1) = \infty$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta=0} \int_a^{x_1-\delta} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon=0} \int_{x_1+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

3. Macht man die obere Grenze variabel, so ist das Integral aus $f(x)$ von a bis x eine Funktion dieser oberen Grenze x; sie heißt **Integralfunktion.** Dieselbe ist immer stetig.

4. Die Funktion $\varphi(x) = \int f(x)\,dx$ definiert diejenige Funktion $\varphi(x)$, deren Ableitung $f(x)$ ist. Bis auf eine Additionskonstante ist damit $\varphi(x)$ festgelegt. Man nennt $\varphi(x)$ das **unbestimmte Integral** aus $f(x)$.

5. **Bestimmtes und unbestimmtes Integral.** Der Zusammenhang zwischen dem unbestimmten Integral $\varphi(x) = \int f(x)\,dx$ und dem bestimmten $\int_a^b f(x)\,dx$ ist gegeben durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\varphi(x)]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a).$$

6. $\int du = u + C.$ | $\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C.$

7. $\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$

8. $\int [u(x) + v(x) + \cdots]\,dx = \int u(x)\,dx + \int v(x)\,d(x) + \cdots.$

9. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,d(x).$$

10. **Mittelwertsatz** der Integralrechnung. Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ im Bereich von a bis b stetig, wechselt außerdem $\varphi(x)$ in diesem Bereich nie das Vorzeichen, so gilt für $0 < \Theta < 1$

$$\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x)\,dx = f[a + \Theta(b - a)] \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Für $\varphi(x) = 1$ wird speziell

$$\int f_1(x)\,dx = (b-a)\,f\,[a + \Theta\,(b-a)].$$

11. Ist eine Potenzreihe in einem bestimmten Bereich konvergent, so ist sie in diesem Bereich gliedweis integrierbar.

12. $\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b).$ | $\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = -f(a).$

13. Sind die Grenzen a und b Funktionen von y, so ist

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx + f(b, y)\frac{db}{dy} - f(a, y)\frac{da}{dy}.$$

Sind a und b konstant, dann ist

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx.$$

14. $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx.$

15. $\iint f(x)\,dx\,dx = x\int f(x)\,dx) - \int x\,f(x)\,dx.$

16. $f(x, y)$ sei eine im ebenen Bereich S endliche und stetige Funktion. Teilt man diesen Bereich in n ebene Teilbereiche σ und nimmt $f(x, y)$ in den einzelnen Teilbereichen σ_i die Werte f_i an, so nennt man den Ausdruck

$$\lim_{n=\infty} \sum_1^n f_i\,\sigma_i,$$

falls man die Teilbereiche unendlich klein, also n unendlich groß macht, das bestimmte **Doppelintegral** der Funktion $f(x, y)$ über den Bereich S oder das bestimmte **Flächenintegral** und schreibt dafür

$$\iint_S f(x, y)\,dx\,dy.$$

Entsprechend definiert man das **dreifache Integral** etc.

Geometrisch läßt sich das bestimmte Doppelintegral deuten als das durch die Fläche $z = f(x, y)$, die Ebene $z = 0$ und einen gegebenen Zylinder $F(x, y) = 0$ eingeschlossene Volumen.

17. Ist die den Bereich S begrenzende Kurve s, so läßt sich immer eine Funktion F(x, y) derart finden, daß der Wert des über den Bereich S sich erstreckenden Doppelintegrals

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy$$

nur von den Wertepaaren der Funktion F(x, y) auf der Kurve s abhängt,

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \int_s F(x, y)\, dy.$$

Dann ist $$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = f(x, y).$$

18. $$\int_a^b\int_c^d f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

19. Ist in einem bestimmten Bereich die Kurve s simultan dargestellt durch $x = u(t)$, $y = v(t)$, sind ferner P und Q in diesem Bereich stetige Funktionen von x und y mit stetigen ersten Ableitungen nach diesen Variablen, so ist das längs der Kurve s sich erstreckende **Kurvenintegral**

$$\int_a^b (P\, dx + Q\, dy)$$

definiert durch

$$\int_a^b (P\, dx + Q\, dy) = \int_a^b \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt}\right) dt.$$

Begrenzt die Kurve s das Gebiet S, so gilt

$$\int_s (P\, dx + Q\, dy) = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Damit ist das Kurvenintegral in ein Flächenintegral übergeführt.

Unter der weiteren Voraussetzung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ist das über beliebige Kurven s_i (zwischen dem Anfangspunkt $x_0 \mid y_0$ und dem Endpunkt $x \mid y$ des bereits bestimmten Bereiches) genommene Kurvenintegral unabhängig von diesem Kurvenweg s_i

$$\int_{s_1} (P\, dx + Q\, dy) = \int_{s_2} (P\, dx + Q\, dy).$$

20. Substitution neuer Variabler.

a) $\int F[f(x)]\,dx$ geht durch die Substitution $f(x) = y$ oder invers $x = u(y)$ über in

$$\int F[f(x)]\,dx = \int F(y)\cdot u'(y)\,dy.$$

b) Entsprechend ist das bestimmte Integral

$$\int\limits_{x=a}^{x=b} F[f(x)]\,dx = \int\limits_{y=f(a)}^{y=f(b)} F(y)\,u'(y)\,dy.$$

c) Das Doppelintegral $\iint F(x, y)\,dx\,dy$ wird durch die Substitution

$$x = u(\xi, \eta), \quad y = v(\xi, \eta)$$

$$\iint F(x, y)\,dx\,dy = \iint F(u, v)\cdot D\cdot d\xi\,d\eta,$$

wenn
$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}.$$

d) Das dreifache Integral $\iiint F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ wird durch die Substitution

$$x = u(\xi, \eta, \zeta), \quad y = v(\xi, \eta, \zeta), \quad z = w(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\iiint F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint F(u, v, w)\cdot D\cdot d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

wenn
$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}.$$

21. Allgemeiner Weg beim Aufsuchen des unbestimmten Integrals.

Substitution. I. Wenn das vorgelegte Integral Ähnlichkeit hat mit einem bereits bekannten, so sucht man es durch eine passende Substitution in die bekannte Form überzuführen.

II. Integrale von der Form $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}$ haben als Lösung $\lg f(x)$.

(Substitution $f(x) = u$.)

III. Integrale von der Form $\int F[f(x)]\, f'(x)\, dx$ werden gelöst durch die Substitution $f(x) = u$.

IV. **Zerlegung in Summanden,** wenn der Ausdruck nicht unmittelbar integrierbar ist. (Partialbruchzerlegung.)

V. **Partielle Integration.**

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Vom neuen Integral $\int v\, du$ hofft man, daß es entweder leichter löslich ist als $\int u\, dv$ oder in brauchbarer Form mit diesem zusammenhängt.

VI. Läßt sich die zu integrierende Funktion im Bereich von a bis b in eine konvergente **Reihe** verwandeln

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + \cdots, \qquad \text{so ist}$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b (u_0 + u_1 + u_2 + \cdots)\, dx.$$

VII. **Näherungsweise** läßt sich jedes bestimmte Integral auswerten nach den in § 62 gegebenen Methoden.

(In den nachfolgenden Paragraphen wird auf diese Ziffern I—VII verwiesen.)

§ 56. Spezielle unbestimmte Integrale rationaler Funktionen.

Jede rationale Funktion läßt sich integrieren, die gebrochene durch Partialbruchzerlegung. Das Integral erscheint immer zusammengesetzt aus rationalen, logarithmischen und arctg-Funktionen.

1. $$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

2. $$\int (ax + b)^m\, dx = \frac{(ax + b)^{m+1}}{a\,(m+1)} \cdots\cdots (1).$$

3. $\int x^m (ax+b)^n dx = \frac{x^m (ax+b)^{n+1}}{a(m+n+1)}$

$$- \frac{mb}{a(m+n+1)} \int x^{m-1} (ax+b)^n dx$$

$$= \frac{x^{m+1}(ax+b)^n}{(m+n+1)} + \frac{nb}{m+n+1} \int x^m (ax+b)^{n-1} dx \cdots\cdots (V).$$

4. $\int \frac{dx}{x} = \lg x.$

5. $\int \frac{dx}{x+a} = \lg(x+a) \cdots\cdots (II).$

6. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \lg(ax+b) \cdots\cdots (II).$

7. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \cdots\cdots (1).$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arccotg} x + C_2.$

9. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \lg \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdots\cdots (§ 46).$

10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \cdots\cdots (8).$

11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \lg \frac{x-a}{x+a} \cdots\cdots (§ 46).$

12. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) \cdots\cdots (10)$

13. $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \lg \frac{\sqrt{ab}+bx}{\sqrt{ab}-bx} \cdots\cdots (11)$

(12 and 13: $a > 0,\ b > 0$.)

14. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \lg \frac{x+a}{x+b} \cdots\cdots (§ 46).$

15. $\int \frac{dx}{(x+a)^2} = -\frac{1}{x+a} \cdots\cdots (7).$

16. $\int \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{x+a}{b} \cdots\cdots (10).$

17. $\int \frac{dx}{(x+a)^2 - b^2} = \frac{1}{2b} \lg \frac{x+a-b}{x+a+b} \cdots (11).$

18. $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ wird auf die Formen 15, 16 oder 17 zurückgeführt durch quadratische Ergänzung des Nenners.

19. $\int \frac{x\,dx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \lg (x^2 \pm a^2) \cdots (II).$

20. $\int \frac{Px + Q}{(x+a)^2} dx = P \lg (x+a) - \frac{Q - Pa}{x+a} \cdots (IV).$

21. $$\int \frac{Px + Q}{(x+a)^2 + b^2} dx = \frac{P}{2} \lg [(x+a)^2 + b^2] + (Q - Pa) \int \frac{dx}{(x+a)^2 + b^2} \cdots (IV).$$

22. $$\int \frac{Px + Q}{(x+a)^2 - b^2} dx = \frac{Q - Pa}{2b} \lg \frac{x+a-b}{x+a+b} + \frac{P}{2} \lg [(x+a)^2 - b^2] \cdots (\S\ 46).$$

23. $\int \frac{Px + Q}{ax^2 + bx + c} dx$ wird auf die Formen 20, 21 oder 22 zurückgeführt durch quadratische Ergänzung des Nenners.

24. $\int \frac{dx}{x^n} = \frac{-1}{(n-1)\, x^{n-1}} \cdots (1).$

25. $\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \frac{-1}{a\,(n-1)\,(ax+b)^{n-1}} \cdots (24).$

26. $$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{2\,(n-1)\,(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2\,(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} \cdots (V).$$

27. $\int \frac{dx}{[(x+a)^2 + b^2]^n} = \frac{1}{b^{2n-1}} \int \frac{du}{(u^2+1)^n} \cdots (x + a = bu).$

28. $\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$ wird durch quadratische Ergänzung

des Nenners zurückgeführt auf $\int \frac{dx}{(x+r)^{2n}} \cdots (24)$ oder auf $\int \frac{dx}{[(x+r)^2+s^2]^n} \cdots (27)$ oder auf $\int \frac{dx}{[(x+r)^2-s^2]^n} \cdots (\S\ 46)$.

29. $$\int \frac{(Px+Q)\,dx}{[(x+a)^2+b^2]^n} = -\frac{P}{2(n-1)[(x+a)^2+b^2]^{n-1}} + \frac{Q-Pa}{b^{2n-1}} \int \frac{du}{(u^2+1)^n} \cdots (x+a=bu).$$

30. $\int \frac{(Px+Q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ wird durch quadratische Ergänzung des Nenners zurückgeführt auf $\int \frac{(Px+Q)\,dx}{(x+r)^{2n}} \cdots (\S\ 46)$ oder auf $\int \frac{(Px+Q)\,dx}{[(x+r)^2-s^2]^n} \cdots (\S\ 46)$ oder auf $\int \frac{(Px+Q)\,dx}{[(x+r)^2+s^2]^n} \cdots (29)$.

§ 57. Spezielle unbestimmte Integrale irrationaler Funktionen.

a) Die zu integrierende Funktion enthält neben x nur noch die n^{te} Wurzel eines linearen Ausdrucks, beide Größen x und $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ aber in rationaler Form; man substituiert $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = z$, dann geht mit $x = \frac{z^n d - b}{a - cz^n}$ und $dx = \frac{n z^{n-1}(ad-bc)}{(a-cz^n)^2} dz$ obige Funktion in eine rationale von z über, also

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{z^n d - b}{a - cz^n},\ z\right) \frac{nz^{n-1}(ad-bc)}{(a-cz^n)^2} dz.$$

1. $$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}\left(\sqrt{ax+b}\right)^3.$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}.$$

3. $\int \frac{Px+Q}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{3a^2}(3Qa - 2Pb + Pax)\sqrt{ax+b}$.

4. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{Px+Q}dx = \frac{2}{P}\left[z - \int \frac{C\,dz}{Pz^2+C}\right]$;

$z = \sqrt{ax+b}$, $C = Qa - Pb$;

5. $\int \frac{dx}{(Px+Q)\sqrt{ax+b}} = 2\int \frac{dz}{Pz^2+C}$;

$z = \sqrt{ax+b}$, $C = Qa - Pb$.

b) Die zu integrierende Funktion enthält in rationaler Form neben x noch den Wurzelausdruck

$$X = \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Zunächst versuche man durch die quadratische Ergänzung des Radikanden das vorliegende Integral

$$\int R(x, X)\,dx = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$$

auf eine der nachstehenden Formen überzuführen.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C_1 = -\arccos\frac{x}{a} + C_2 \cdots\cdot (6)$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \lg(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) \cdots\cdot (x + \sqrt{x^2 \pm a^2} = u)$.

9. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} \cdots\cdot$ (18 und 20).

10. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\lg(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) \cdots\cdot$ (18 und 21).

11. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$.

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$.

13. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2} \cdots\cdots (30).$

14. $\int x\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}(x^2\pm a^2)\sqrt{x^2\pm a^2} \cdots\cdots (31).$

15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\lg\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} \cdots\cdots (\sqrt{}=u).$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\lg\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x} \cdots\cdots (\sqrt{}=u).$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x} \cdots\cdots (\sqrt{}=u).$

18. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = a^2\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} - \int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}};$

kommt die Wurzel im Zähler vor, so wird sie meist in den Nenner geschafft.

19. $\int \frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{x}\,dx$ wie 18.

20. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} \cdots\cdots (26).$

21. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2\pm a^2}}{2} \mp \frac{a^2}{2}\lg(x+\sqrt{x^2\pm a^2}) \cdots\cdots (27).$

22. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} \cdots\cdots (28).$

23. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2\pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{a^2x} \cdots (29).$

24. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ und $\int x^2\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx$ wie 18.

25. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$ und $\int \frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{x^2}\,dx$ wie 18.

26. $$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2}}{m} + \frac{(m-1)\,a^2}{m}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdots\cdot (V).$$

27. $$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{x^2\pm a^2}}{m} \mp \frac{(m-1)\,a^2}{m}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} \cdots\cdot (V).$$

28. $$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(m-1)\,a^2 x^{m-1}} + \frac{m-2}{(m-1)\,a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2-x^2}} \cdots\cdot (V).$$

29. $$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{x^2\pm a^2}} = \mp \frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{(m-1)\,a^2 x^{m-1}} \mp \frac{m-2}{(m-1)\,a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{x^2\pm a^2}} \cdots\cdot (V).$$

30. $$\int x^m\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x^{m+1}\sqrt{a^2-x^2}}{m+2} + \frac{a^2}{m+2}\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ wie 18.}$$

31. $$\int x^m\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x^{m+1}\sqrt{x^2\pm a^2}}{m+2} \pm \frac{a^2}{m+2}\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} \text{ wie 18.}$$

32. $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^m}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(m-1)\,x^{m-1}} - \frac{1}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2-x^2}} \text{ wie 18.}$$

33. $$\int \frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{x^m}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{x^2\pm a^2}} \text{ wie 18.}$$

Oft führen nach erfolgter quadratischer Ergänzung folgende Substitutionen auf bekannte transzendente Integrale:

$$x = a\cos t \text{ oder } x = a\sin t \text{ bei } \sqrt{a^2 - x^2},$$
$$x = a\,\mathrm{tgt} \text{ bei } \sqrt{a^2 + x^2}, \quad x = \frac{a}{\cos t} \text{ bei } \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Führt die quadratische Ergänzung auf kein bekanntes Integral, so führt man die irrationale Funktion in eine rationale über durch die Substitution

34. $X = \sqrt{ax^2 + bx + c} = z - x\sqrt{a}$,
wenn $a > 0$; dann ist $z = x\sqrt{a} + \sqrt{ax^2 + bx + c}$ und

$$\int R[x, X]\,dx = \int R\left[\frac{z^2 - c}{2z\sqrt{a} + b}, \frac{z^2\sqrt{a} + bz + c\sqrt{a}}{2z\sqrt{a} + b}\right] \cdot \frac{z^2\sqrt{a} + bz + c\sqrt{a}}{(2z\sqrt{a} + b)^2}\,2\,dz.$$

35. $X = \sqrt{ax^2 + bx + c} = zx - \sqrt{c}$,
wenn $c > 0$; dann ist $z = \frac{1}{x}[\sqrt{c} + \sqrt{ax^2 + bc + c}]$ und

$$\int R[x, X]\,dx = \int R\left[\frac{2z\sqrt{c} + b}{z^2 - a}, \frac{z^2\sqrt{c} + bz + a\sqrt{c}}{z^2 - a}\right] \cdot \frac{-(z^2\sqrt{c} + bz + a\sqrt{c})}{(z^2 - a)^2}\,2\,dz.$$

36. $X = \sqrt{ax^2 + bx + c} = z(\alpha x - \beta)$,
wenn $b^2 - 4ac > 0$, also $ax^2 + bx + c = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)$;

$$\text{dann ist } z = \sqrt{\frac{\gamma x + \delta}{\alpha x + \beta}} \text{ und}$$

$$\int R[x, X]\,dx = \int R\left[\frac{\beta z^2 - \delta}{\gamma - \alpha z^2}, \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)z}{\gamma - \alpha z^2}\right] \cdot \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{(\gamma - \alpha z^2)^2}\,2z\,dz.$$

37. Wenn $a < 0, c < 0, b^2 - 4ac <$, setze man

$$X = \sqrt{ax^2 + bx + c} = i\sqrt{a_1x^2 + b_1x + c_1},$$

so daß $a_1 = -a$ wie $c_1 = -c$ positiv wird und $b_1 = -b$. Dann wende man 34 oder 35 an. Das Intregal ist dann imaginär.

38. Im **allgemeinsten Fall** führt folgende Methode zum Ziel. Die zu integrierende Funktion $R(x, X)$, wo

$$X = \sqrt{ax^2 + bx + c},$$

ist im allgemeinsten Fall von der Form

$$\frac{AX + B}{CX + D};$$

A, B, C, D sind wie die noch folgenden Funktionen E, F, G, g, f, φ rational und ganz in x. Die Multiplikation von Zähler und Nenner mit $CX - D$ macht den Nenner rational, so daß

$$R(x, X) = E + F \cdot X$$

wird. Der erste Summand ist rational, der zweite wird auf die Form $\frac{G}{X}$ gebracht. Im allgemeinsten Fall ist G eine gebrochene Funktion von der Form $g + \frac{f}{\varphi}$. Damit ist dann das vorgelegte Integral **reduziert** auf

$$\int R(x, X)\, dx = \int E\, dx + \int \left(g + \frac{f}{\varphi}\right) \frac{dx}{X}.$$

Die in x ganze rationale Funktion g ist von der Form

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

die echt gebrochene Funktion $f : \varphi$ läßt sich in Partialbrüche zerlegen von der Form

$$\frac{C}{(x - c)^n} \text{ bezw. } \frac{Px + Q}{[(x - c)^2 + d^2]^n}.$$

Damit ist dann das Integral $\int \left(g + \frac{f}{\varphi}\right) \frac{dx}{X}$ reduziert auf eine Summe von Integralen — **Normalintegrale** — von der Form

$$\int \frac{x^m\, dx}{X}, \quad \int \frac{dx}{(x - c)^n X}, \quad \int \frac{(Px + Q)\, dx}{[(x - c)^2 + d^2]^n X}.$$

Ist X durch quadratische Ergänzung bereits auf die Form $\sqrt{a^2 - x^2}$ bezw. $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ gebracht, so werden diese Normalintegrale unmittelbar oder mittelbar nach vorhergegangener passender Substitution nach den Formeln 1 bis 33 berechnet.

§ 58. Spezielle unbestimmte Integrale transzendenter Funktionen.

1. $\int \sin x \, dx = -\cos x$.

2. $\int \cos x \, dx = \sin x$.

3. $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\lg \cos x \cdots$ (II).

4. $\int \operatorname{cotg} x \, dx = \lg \sin x \cdots$ (II).

5. $\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \cdots$ (V).

6. $\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} \cdots$ (V).

7. $\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \lg (1+x^2) \cdots$ (V).

8. $\int \operatorname{arccotg} x \, dx = x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \lg (1+x^2) \cdots$ (V).

9. $\int e^x \, dx = e^x$.

10. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\lg a}$.

11. $\int \lg x \, dx = x (\lg x - 1) \cdots$ (V).

12. $\int \overset{a}{\log} x \, dx = \frac{x}{\lg a} (\lg x - 1) \cdots$ (11).

13. $\int \sin x \cos x \, dx = {}^1/_2 \sin^2 x + C_1 = -{}^1/_4 \cos 2x + C_2 \cdots$ (I).

14. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \lg \operatorname{tg} x + C_1 = -\lg \operatorname{cotg} x + C_2 \cdots$ (II).

15. $\int \frac{dx}{\sin x} = \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C_1 = -\lg \operatorname{cotg} \frac{x}{2} + C_2 \cdots$ (14).

16. $\int \frac{dx}{\cos x} = \lg \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C_1 = \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C_2 \cdots$ (15).

17. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdots (x = 2t)$.

18. $\int \frac{dx}{1-\cos x} = -\operatorname{cotg} \frac{x}{2} \cdots (x = 2t)$.

19. $\int \frac{dx}{1+\sin x} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) \cdots\cdots (17$.

20. $\int \frac{dx}{1-\sin x} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) \cdots\cdots (18)$.

21. $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ für $a^2 > b^2$,

$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \lg \frac{b + a\cos x + \sin x \cdot \sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}$ für $a^2 < b^2$ nach 32.

22. $\int \frac{dx}{a+b\sin x} = -\int \frac{du}{a+b\cos u} \cdots\cdots \left(x = \frac{\pi}{2} - u\right)$.

23. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lg\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right) \cdots\cdots (16)$.

24. $\int \frac{\cos x\, dx}{a+b\cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a+b\cos x} \cdots\cdots (IV)$.

25. $\int \frac{\sin x\, dx}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}\lg(a+b\cos x) \cdots\cdots (II)$.

26. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x$.

27. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$.

28. $\int \sin^2 x\, dx = -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} \cdots\cdots (V)$.

29. $\int \cos^2 x\, dx = \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} \cdots\cdots (V)$.

30. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x \cdots\cdots (IV)$.

$$\left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\right).$$

31. $\int \frac{dx}{1-a^2\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-a^2}\operatorname{tg} x\right) \cdots\cdots (32)$.

32. $\int f(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{cotg} x)\,dx$ $\left(\text{wird für } \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\right)$

$$=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}, \frac{1-t^2}{2t}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

33. $\int \sin ax \sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \cdots (V).$

34. $\int \cos ax \cos bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \cdots (V)$

35. $\int \sin ax \cos bx\,dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)}$

$$-\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} \cdots\cdot (V).$$

36. $\int \sin^m x\,dx = \frac{\sin^{m-1}x\cos x}{-m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}x\,dx \cdot\cdot (V).$

37. $\int \sin^{2n+1}x\,dx = -\int (1-t^2)^n\,dt \cdots\cdot (\cos x = t).$

38. $\int \cos^m x\,dx = \frac{\cos^{m-1}x\sin x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2}x\,dx \cdot\cdot (V).$

39. $\int \cos^{2n+1}x\,dx = \int (1-t^2)^n\,dt \cdots\cdot (\sin x = t).$

40. $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \frac{t^n\,dt}{1+t^2} \cdots\cdot (\operatorname{tg} x = t);$

$$\text{oder} = \frac{\operatorname{tg}^{n-1}x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2}x\,dx \cdots\cdot (V).$$

41. $\int \operatorname{cotg}^n x\,dx = -\int \frac{t^n\,dt}{1+t^2} \cdots\cdot (\operatorname{cotg} x = t);$

$$\text{oder} = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1}x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2}x\,dx \cdots\cdot (V).$$

42. $\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}$

$$+\frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2}x\,dx;$$

$$\text{oder} = -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x\cos^{n}x\,dx \cdots (V).$$

43. $\int \cos^m x \sin^{2n+1} x\,dx = -\int t^m (1-t^2)^n dt \cdots (\cos x = t).$

44. $\int \sin^m x \cos^{2n+1} x\,dx = \int t^m (1-t^2)^n dt \cdots (\sin x = t).$

45. $$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx = \frac{\sin^{m+1}x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-m-2}{n-1}\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^{n-2}x} \cdots (V).$$

46. $$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}dx = \frac{-\cos^{n+1}x}{(m-1)\sin^{m-1}x} + \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{\cos^n x}{\sin^{m-2}x}dx \cdots (V).$$

47. $$\int \frac{dx}{\sin^m x} = \frac{-\cos x}{(m-1)\sin^{m-1}x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2}x} \cdots (46).$$

48. $$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2}x} \cdots (45).$$

49. $$\int \frac{dx}{\sin^{2m}x} = -\int (1+t^2)^{m-1}dt \cdots (\operatorname{cotg} x = t).$$

50. $$\int \frac{dx}{\cos^{2m}x} = \int (1+t^2)^{m-1}dt \cdots (\operatorname{tg} x = t).$$

51. $\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x \cdots (57).$

52. $\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x \cdots (56).$

53. $$\int \frac{\sin x\,dx}{x} = x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{5!} - + \cdots (VI)$$

definiert den **Integralsinus** $\mathrm{Si}(x)$.

54. $$\int \frac{\cos x\,dx}{x} = \lg x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4!} - + \cdots (VI)$$

definiert den **Integralkosinus** $\mathrm{Ci}(x)$.

55. $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x}\, dx = x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdots (32)$.

56. $\int x^m \sin x\, dx = - x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x\, dx \cdots (V)$.

57. $\int x^m \cos x\, dx = x^m \sin x - m \int x^{m-1} \sin x\, dx \cdots (V)$.

58. $\int \frac{\sin x\, dx}{x^n} = \frac{-\sin x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\cos x\, dx}{x^{n-1}} \cdots (56)$.

59. $\int \frac{\cos x\, dx}{x^n} = \frac{-\cos x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{\sin x\, dx}{x^{n-1}} \cdots (57)$.

60. $\int x e^x\, dx = e^x (x - 1) \cdots (V)$.

61. $\int x a^x\, dx = \frac{a^x (x \lg a - 1)}{(\lg a)^2} \cdots (60)$.

62. $\int x^m e^x\, dx = x^m e^x - m \int x^{m-1} e^x\, dx \cdots (V)$

$$= x^m e^x \left[1 - \binom{m}{1}\frac{1!}{x} + \binom{m}{2}\frac{2!}{x^2} - \cdots + (-1)^m \frac{m!}{x^m}\right].$$

63. $\int x^m a^x\, dx = \frac{1}{(\lg a)^{m+1}} \int u^m e^u\, du \cdots (x \lg a = u)$

$$= \frac{x^m a^x}{\lg a}\left[1 - \binom{m}{1}\frac{1!}{x \lg a} + \binom{m}{2}\frac{2!}{(x \lg a)^2} - + \cdots + (-1)^m \frac{m!}{(x \lg a)^m}\right].$$

64. $\int \frac{e^x\, dx}{x} = \lg x + \frac{x}{1!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots (VI)$

definiert den **Integrallogarithmus** Li (x).

65. $\int \frac{e^x\, dx}{x^m} = \frac{-e^x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{m-1} \int \frac{e^x\, dx}{x^{m-1}} \cdots (62)$.

66. $\int \frac{dx}{1 + e^x} = \lg \frac{e^x}{1 + e^x} \cdots (1 + e^x = u)$.

67. $\int \frac{dx}{a + b e^{mx}} = \frac{1}{am} [mx - \lg(a + b e^{mx})] \cdots (a + b e^{mx} = u)$.

68. $\int \frac{dx}{a e^{mx} + b e^{-mx}} = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left[e^{mx} \sqrt{\frac{a}{b}} \right] \cdots (e^{mx} = u).$

69. $\int \frac{x e^x dx}{(1 + x)^2} = \frac{e^x}{1 + x} \cdots (1 + x = u).$

70. $\int \sqrt{1 + a^x}\, dx = \frac{2\sqrt{1 + a^x}}{\lg a}$

$+ x - 2 \overset{a}{\log} (1 + \sqrt{1 + a^x}) \cdots (\sqrt{\ } = u).$

71. $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bc^x}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \overset{c}{\log} \frac{\sqrt{a + bc^x} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bc^x} + \sqrt{a}} \cdots (\sqrt{\ } = u).$

72. $\int e^{ax} \cos bx\, dx = e^{ax} . \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} \cdots (V).$

73. $\int e^{ax} \sin bx\, dx = e^{ax} . \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \cdots (V).$

74. $\int x \lg x\, dx = \frac{x^2 (2 \lg x - 1)}{4} \cdots (V).$

75. $\int \frac{dx}{\lg x} = \int \frac{e^u du}{u} \cdots (\lg x = u).$

76. $\int \frac{\lg x\, dx}{x} = \frac{1}{2} (\lg x)^2 \cdots (\lg x = u).$

77. $\int x^n \lg x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n + 1} \lg x - \frac{x^{n+1}}{(n + 1)^2} \cdots (V).$

78. $\int \frac{(\lg x)^n dx}{x} = \frac{1}{n + 1} (\lg x)^{n+1} \cdots (\lg x = u).$

79. $\int \frac{\lg x\, dx}{(a + bx)^n} = \frac{-\lg x}{b(n - 1)(a + bx)^{n-1}}$

$+ \frac{1}{b(n - 1)} \int \frac{dx}{x(a + bx)^{n-1}} \cdots (V).$

80. $\int \sin(\lg x)\, dx = \frac{x}{2} \left[\sin(\lg x) - \cos(\lg x) \right] \cdots (V).$

81. $\int \cos(\lg x)\, dx = \frac{x}{2} \left[\sin(\lg x) + \cos(\lg x) \right] \cdots (V).$

82. $\int \frac{\lg(\lg x)\,dx}{x} = \lg x \cdot \lg(\lg x) - \lg x \cdots (V).$

83. $\int x \arcsin x\,dx$

$$= \frac{1}{4}\left[\arcsin x \cdot (2x^2 - 1) + x\sqrt{1 - x^2}\right] \cdots (x = \sin u).$$

84. $\int x \arccos x\,dx$

$$= \frac{1}{4}\left[\arccos x \cdot (2x^2 - 1) - x\sqrt{1 - x^2}\right] \cdots (x = \cos u).$$

85. $\int x \,\mathrm{arctg}\, x\,dx = \frac{1}{2}\left[\mathrm{arctg}\, x \cdot (x^2 + 1) - x\right] \cdots (x = \mathrm{tg}\, u).$

86. $\int x \,\mathrm{arccotg}\, x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathrm{arccotg}\, x \cdot (x^2 + 1) + x\right] \cdots (x = \mathrm{cotg}\, u).$$

§ 59. Spezielle bestimmte Integrale.

1. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} \cdots (a > 0,\ \ b > 0).$

2. $\int\limits_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{dx}{a + bx^2} = \int\limits_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^\infty \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}.$

3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

5. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x}} = \pi.$

6. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

7. $$\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}}.$$

8. $$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

9. $$\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\quad 2n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

10. $$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot4\cdot6\cdots\quad 2n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}.$$

11. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{b}{a}\cdots\cdot(a>b),$$
$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\lg\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{b}\cdots\cdot(a<b),$$
$$= \frac{1}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a=b).$$

12. $$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sin bx}\,dx = 0\cdots\cdot(a<b).$$

13. $$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdots\cdot(a>0),$$
$$= 0\cdots\cdot(a=0),$$
$$= -\frac{\pi}{2}\cdots\cdot(a<0).$$

14. $$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x}\,dx = \infty.$$

15. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx = \frac{1}{2} \lg 2.$$

16. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{tg} x \, dx = \infty.$$

17. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx$$
$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

18. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \, dx$$
$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}.$$

19. $$\int_0^{\pi} \sin ax \sin bx \, dx = \int_0^{\pi} \cos ax \cos bx \, dx = 0.$$

20. $$\int_0^{\infty} e^{-x} \, dx = 1.$$

21. $$\int_0^{\infty} e^{-px^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

22. $$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx = n! \cdots (\text{n ganzzahlig}).$$

§ 60. Elliptische Integrale.

1. Integrale von der Form $\int R(x, X)\,dx$, wobei $R(x, X)$ eine rationale Funktion von x und X ist, X selber aber mit x verknüpft ist durch die Gleichung

$$X^m + G_1 X^{m-1} + G_2 X^{m-2} + \cdots + G_{m-1} X + G_m = 0,$$

G_i als ganze rationale Funktion von x vorausgesetzt, heißen **Abelsche Integrale** (= Integrale algebraischer Funktionen).

2. Genügt speziell X einer Gleichung zweiten Grades, ist also $X = \sqrt{G(x)}$, so wird das Abelsche Integral ein **hyperelliptisches Integral** (im weitesten Sinn).

3. Ist G(x) vierten Grades von x, also

$$X = \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e},$$

so nennt man $\int R(x, X)\,dx$ ein **elliptisches Integral.**

4. Hyperelliptisches Integral im engern Sinn nennt man $\int R(x, X)\,dx$ dann, wenn die $X = \sqrt{G(x)}$ definierende Funktion G(x) vom höhern als vom vierten Grad ist.

5. Die Lösung des Integrals

$$\int R(x, X)\,dx = \int R\left(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}\right) dx$$

läßt sich durch passende Substitutionen und Umformungen zurückführen auf die Lösung der drei **elliptischen Normalintegrale** (erster, zweiter und dritter Gattung):

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

$$\Pi(n, k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

k heißt der **Modul,** φ die **Amplitude** der Normalintegrale, n der **Parameter** des Normalintegrals dritter Gattung; $|k| < 1$.

6. Durch eine lineare Substitution $y = \frac{pt+q}{t+1}$ bei günstiger Wahl von p und q und elementare Umformung geht $\int R(y, Y)\, dy$ mit $Y = \sqrt{ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e}$ zunächst über in

$$\int F(t^2, T)\, t\, dt + \int G(t^2)\, dt + \int H(t^2) \frac{dt}{T}$$

mit F, G, H als rationalen Funktionen ihrer Argumente und

$$T = \sqrt{\pm (t^2 + \lambda)(t^2 + \mu)}.$$

Das erste Integral findet durch die Substitution $t^2 = x$ seine Lösung, das zweite ist ein solches rationaler Funktionen, das dritte läßt sich durch die Substitution $t^2 = \frac{\alpha x^2 + \beta}{\gamma x^2 + \delta}$ bei günstiger Wahl von α, β, γ, δ immer auf die Form

$$L \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + M \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx + N \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

bringen, L, M, N als algebraische Funktionen von x vorausgesetzt. Die drei auftretenden Integrale sind die elliptischen Normalintegrale. Die Substitution $x = \sin\varphi$ macht

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k, \varphi);$$

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = E(k, \varphi);$$

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \Pi(n, k, \varphi).$$

7. $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k^2 \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4 \int_0^x \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots,$$

oder wenn man

$$g_0 = 1,\quad g_1 = \frac{1}{2},\quad g_2 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \cdots\ g_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots 2n}$$

setzt und ebenso

$$G_1 = \frac{x}{g_0},\quad G_2 = \frac{x}{g_0} + \frac{x^3}{3g_1},\quad G_3 = \frac{x}{g_0} + \frac{x^3}{3g_1} + \frac{x^5}{5g_2}, \cdots$$

$$G_n = \frac{x}{g_0} + \frac{x^3}{3g_1} + \frac{x^5}{5g_2} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)g_{n-1}},$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \arcsin x \cdot \sum_0^\infty g_n{}^2 k^{2n} - \sqrt{1-x^2} \sum_1^\infty g_n{}^2 k^{2n} G_n,$$

gleichmäßig konvergente Reihe, so lange kx ein echter Bruch).

8. Für $x = 1$ wird dieses Integral

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty g_n{}^2 k^{2n}$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right].$$

9. $$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_0^\infty \frac{g_n k^{2n}}{1-2n} \int_0^x \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \arcsin x \sum_0^\infty \frac{g_n{}^2 k^{2n}}{1-2n} - \sqrt{1-x^2} \sum_1^\infty \frac{g_n{}^2 k^{2n}}{1-2n} G_n.$$

10. Für $x = 1$ wird dieses Integral

$$E = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty \frac{g_n{}^2 k^{2n}}{1-2n}$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \cdots\right].$$

11. Von den **unvollständigen Integralen**

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

sind Spezialfälle die **vollständigen Integrale**

$$K=F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\cdots\cdot\ \text{(siehe 8)},$$

$$E=E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\cdots\cdot\ \text{(siehe 10)}.$$

12. $$F(k,\varphi)=a_0\varphi-\frac{a_2}{2}\sin 2\varphi+\frac{a_4}{4}\sin 4\varphi-\frac{a_6}{6}\sin 6\varphi+\cdots.$$

$$E(k,\varphi)=b_0\varphi+\frac{b_2}{2}\sin 2\varphi-\frac{b_4}{4}\sin 4\varphi+\frac{b_6}{6}\sin 6\varphi-\cdots.$$

Die Koeffizienten a_i und b_i sind gegeben durch

a) $\pi a_0 = 2K,$

$\pi k^2 a_2 = \pi k^2 \lambda a_0 - 8E,$

$3a_4 = 2(\lambda a_2 - a_0),$

$5a_6 = 4\lambda a_4 - 3a_2,$

$7a_8 = 6\lambda a_6 - 5a_4,\ \cdots\cdot$

$(n-1)a_n = (n-2)\lambda a_{n-2} - (n-3)a_{n-4},$

n geradzahlig und größer als 4 vorausgesetzt;
λ ist gegeben durch $\lambda k^2 = 2(2-k^2)$.

b) $\pi b_0 = 2E,$

$3\pi k^2 b_2 = \pi k^2 \lambda b_0 - 8(1-k^2)K,$

$5b_4 = 2(\lambda b_2 - b_0),$

$7b_6 = 4\lambda b_4 - b_2,$

$9b_8 = 6\lambda b_6 - 3b_4,\ \cdots\cdot$

$(n+1)b_n = (n-2)\lambda b_{n-2} - (n-5)b_{n-4},$

n geradzahlig und größer als 4 vorausgesetzt, λ wie oben.

Die b_i sind mit den a_i verknüpft durch

$$8b_2 = k^2(2a_0 - a_4)$$

und $$4n\,b_n = k^2(a_{n-2} - a_{n+2}) \text{ für jedes } n>2.$$

§ 61. Fouriersche Reihe.

1. Sind m und n ganze Zahlen, so gilt von den Integralen

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos m x \cos n x \, dx \quad \text{und} \quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin m x \sin n x \, dx$$

a) sie nehmen für $m = n = 0$ den Wert 2 bezw. 0 an;
b) sie nehmen für $m = n \lessgtr 0$ den Wert 1 an;
c) sie nehmen für $m \lessgtr n$ den Wert 0 an.

2. Die Reihe

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_1^{\infty} [A_k \cos k x + B_k \sin k x]$$

heißt eine **trigonometrische Reihe.**

3. Sind die Koeffizienten A_k und B_k dieser Reihe bestimmt durch

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \cos k x \, dx,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \sin k x \, dx,$$

so heißt die Reihe eine **Fouriersche Reihe.**

4. Ist die im Intervall von 0 bis 2π stetige Funktion $F(x)$ definiert durch eine in diesem Intervall gleichmäßig konvergente Reihe

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_1^{\infty} [A_k \cos k x + B_k \sin k x],$$

so sind die Koeffizienten A_k und B_k bestimmt durch

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \cos k x \, dx,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \sin k x \, dx.$$

5. Die Funktion $F(x)$ ist im Intervall von a bis b **willkürlich** definiert, wenn für jede Stelle dieses Intervalls die Funktion willkürlich definiert ist.

6. Durch eine solche willkürliche Definition der Funktion $F(x)$ im Intervall von a bis b ist in diesem Intervall eine endliche oder unendlich große Anzahl von Unstetigkeitsstellen und Extremwertstellen gegeben. An jeder dieser Unstetigkeitsstellen kann $F(x)$ um einen endlichen oder unendlich großen Wert sich ändern.

7. Die im Intervall von a bis b willkürlich definierte Funktion $F(x)$ ist in diesem Intervall **integrierbar**, wenn sie den Bedingungen genügt: Die Anzahl der Extremwertstellen ist endlich, die Anzahl der Unstetigkeitsstellen ist endlich und die Änderung an jeder Unstetigkeitsstelle ist endlich.

8. Ist die Funktion $F(x)$ im Intervall von a bis b endlich, hat sie ferner in diesem Intervall keine unendlich große Anzahl von Extremwertstellen und Unstetigkeitsstellen, so läßt sie sich in eine Fouriersche Reihe entwickeln. In einem gewöhnlichen Punkt ist der Wert der Reihe gleich dem Wert der Funktion in diesem Punkt. An einer Unstetigkeitsstelle ist der Wert der Reihe das Mittel aus den Grenzwerten der Funktion zu beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle. Die Funktion läßt sich nur auf eine Weise in eine Fouriersche Reihe verwandeln.

9. Der Wert der Funktion in einem bestimmten Punkt hängt nur ab vom Verhalten der Funktion in der Umgebung dieses Punktes.

§ 62. **Näherungsrechnung für bestimmte Integrale.**

1. Liegt $f(x)$ im Bereich von a bis b stets zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, ist also

$$\varphi(x) \leqq f(x) \leqq \psi(x)$$

in diesem Bereich, so gilt in diesem, sobald $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ stetig und endlich in ihm sind,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b \psi(x)\,dx\,.$$

2. Die durch $\int_a^b f(x)\,dx$ dargestellte Fläche bezw. die Strecke $b - a$ teilt man in n gleiche Teile. Wenn $h = \frac{b-a}{n}$ ist und y_0, y_1, y_2, $\cdots y_n$ die den Abscissen a, $a + h$, $a + 2h$, $\cdots a + nh$ entsprechenden Funktionswerte sind, dann ist **angenähert** (umso genauer, je größer n)

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\,[y_0 + y_1 + y_2 + \cdots y_{n-2} + y_{n-1}]$$
$$= h\,[y_1 + y_2 + y_3 + \cdots y_{n-1} + y_n]$$

(Rechtecksformel)

$$= \frac{h}{2}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right] + K$$

(Trapezformel).

Das Korrekturglied K dient zur Abschätzung des Fehlers. Ist $0 < \Theta < 1$, so wird

$$K = -\frac{h^2}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right] + \frac{\Theta}{384} h^4 \left[f'''(b) - f'''(a)\right].$$

3. **Simpsonsche Regel.** Man teilt die Strecke $b - a$ in eine gerade Anzahl Teile $h = \frac{b-a}{n}$; dann ist mit $0 < \Theta < 1$

$$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right] + \frac{\Theta}{288} h^4 \left[f'''(b) - f'''(a)\right].$$

Das Korrekturglied dient wieder zur Abschätzung des Fehlers.

§ 63. Anwendung der Integralrechnung auf Geometrie und Mechanik.

Man nennt **Rektifikation** die Bestimmung der Bogenlänge s einer ebenen oder räumlichen Kurve, **Quadratur** die Bestimmung des Flächeninhaltes F, den eine ebene Kurve in ihrer Ebene mit anderen Elementen bildet, **Komplanation** die Bestimmung

der Oberfläche O eines Körpers und **Kubatur** die Bestimmung des Volumens V eines Körpers.

a) Rektifikation.

1. Der Bogen s ist begrenzt durch zwei Ordinaten x_0 und x. Das Bogenelement ds zwischen zwei unendlich benachbarten Ordinaten ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

die Bogenlänge s der Kurve ist

$$s = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

2. Der Bogen s ist begrenzt durch zwei Radienvektoren φ_0 und φ. Das Bogenelement ds zwischen zwei unendlich benachbarten Radienvektoren ist

$$ds = \sqrt{dr^2 + (r\,d\varphi)^2} = d\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2},$$

die Bogenlänge s der Kurve ist

$$ds = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}.$$

3. Der Bogen s einer Raumkurve ist begrenzt durch zwei Parameter t_0 und t. Wenn die Gleichung der Raumkurve

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

so ist das Bogenelement

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

die Bogenlänge s der Kurve ist

$$s = \int_{t_0}^{t} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

b) **Quadratur.**

4. Die Fläche F ist begrenzt durch die Kurve $y = f(x)$, die x-Axe und zwei Ordinaten x_0 und x. Das Flächenelement zwischen zwei unendlich benachbarten Ordinaten ist $dF = y\,dx$, die Fläche F der Kurve ist

$$F = \int_{x_0}^{x} y\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

5. Die Fläche F ist begrenzt durch zwei Kurven $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$. Das Flächenelement ist

$$dF = [f_1(x) - f_2(x)]\,dx,$$

die Fläche von x_0 bis x ist

$$F = \int_{x_0}^{x} [f_1(x) - f_2(x)]\,dx.$$

6. Die Fläche F ist begrenzt durch eine geschlossene Kurve $F(x, y) = 0$. An der Stelle x sind die beiden Ordinaten y_1 und y_2, das Flächenelement ist

$$dF = (y_1 - y_2)\,dx,$$

die Fläche zwischen den die Fläche begrenzenden und die Kurve berührenden Ordinaten $x = a$ und $x = b$ ist

$$F = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx.$$

7. Die Fläche F ist begrenzt durch die Kurve $r = f(\varphi)$ und zwei Radienvektoren φ_0 und φ. Das Flächenelement zwischen zwei unendlich benachbarten Radienvektoren ist

$$dF = {}^1/_2\, r^2\,d\varphi,$$

die Fläche F der Kurve ist

$$F = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2\,d\varphi.$$

8. Die Fläche F ist begrenzt durch zwei Kurven $r_1 = f_1(\varphi)$ und $r_2 = f_2(\varphi)$. Das Flächenelement ist

$$dF = {}^1/_2\,(r_1^2 - r_2^2)\,d\varphi,$$

die Fläche von φ_0 bis φ ist

$$F = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} (r_1^2 - r_2^2)\, d\varphi.$$

9. Die Fläche F ist begrenzt im schiefwinkligen Koordinatensystem durch die Kurve $\eta = f(\xi)$, die ξ-Axe und zwei Ordinaten ξ_0 und ξ. Das Flächenelement zwischen zwei unendlich benachbarten Ordinaten ist $dF = \eta\, d\xi \sin\omega$, wenn ω der Winkel der Koordinatenaxen, die Fläche der Kurve ist

$$F = \sin\omega \int_{\xi_0}^{\xi} \eta\, d\xi.$$

c) **Komplanation.**

10. Oberfläche O eines Rotationskörpers. Das Oberflächenelement, gebildet durch das um die x-Axe bezw. y-Axe rotierende Bogenelement d s, ist

$$dO = ds \cdot 2y\pi \quad \text{bezw.} \quad dO = ds \cdot 2x\pi,$$

die Oberfläche, gebildet durch den um die x-Axe bezw. y-Axe rotierenden Bogen von x_0 bis x ist

$$O = 2\pi \int_{x_0}^{x} y\, ds = 2\pi \int_{x_0}^{x} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \cdots\text{(x-Axe)},$$

$$O = 2\pi \int_{x_0}^{x} x\, ds = 2\pi \int_{x_0}^{x} x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \cdots\text{(y-Axe)}.$$

11. Oberfläche O eines Rotationskörpers bei Polarkoordinaten. Das Oberflächenelement ist bei Rotation um die x- bezw. y-Axe

$$dO = ds \cdot 2\pi r \sin\varphi \quad \text{bezw.} \quad dO = ds \cdot 2\pi r \cos\varphi,$$

die Oberfläche von φ_0 bis φ ist

$$O = 2\pi \int_{\varphi^0}^{\varphi} r \sin\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi \cdots \text{(x-Axe)},$$

$$O = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} r \cos\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi \cdots \text{(y-Axe)}.$$

12. **Erste Guldinsche Regel.** Die Oberfläche, die durch den rotierenden Bogen entsteht, ist gleich dem Produkt aus der Bogenlänge mal dem Weg des Bogenschwerpunkts.

13. Oberfläche O eines durch die Fläche $z = f(x, y)$ begrenzten Körpers. Das Oberflächenelement dO hat als Projektion auf die z-Ebene $dx\,dy = dO \cos\gamma$, die Oberfläche O ist

$$O = \iint \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dy$$

$$= \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx.$$

p und q sind die partiellen Ableitungen von z nach x und y. a, b, y_1 und y_2 bezw. c, d, x_1 und x_2 siehe 20.

Übergang zu Zylinder-Koordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

$$O = \iint \sqrt{r^2 + r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\, d\varphi\, dr.$$

Übergang zu sphärischen Koordinaten

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi.$$

Das Oberflächenelement ist $dO = r^2 \cos\psi\, d\varphi\, d\psi$, die Fläche ist

$$O = \iint r^2 \cos\psi\, d\varphi\, d\psi.$$

d) Kubatur.

14. Volumen V eines Rotationskörpers, gebildet durch die Kurve $y = f(x)$. Das Volumelement dV ist eine Scheibe, gebildet durch das um die x- bezw. y-Axe rotierende Flächenelement dF.

$$dV = y^2\pi \cdot dx \quad \text{bezw.} \quad dV = x^2\pi \cdot dy.$$

Das Volumen V, gebildet durch die um eine der Axen rotierende Fläche F von x_0 bis x ist

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 \, dx \cdots \text{(x-Axe)},$$

$$V = \pi \int_{y_0}^{y} x^2 \, dy \cdots \text{(y-Axe)}.$$

15. Volumen V eines Rotationskörpers, gebildet durch die Kurve $r = f(\varphi)$. Das Volumelement dV wird gebildet durch den um die x- bezw. y-Axe rotierenden unendlich kleinen Sektor dF und ist

$$dV = {}^2/_3 \, \pi r^3 \sin\varphi \, d\varphi \quad \text{bezw.} \quad dV = {}^2/_3 \, \pi r^3 \cos\varphi \, d\varphi.$$

Das Volumen V, gebildet durch die um eine der Axen rotierende Fläche F von φ_0 bis φ ist

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} r^3 \sin\varphi \, d\varphi \cdots \text{(x-Axe)},$$

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} r^3 \cos\varphi \, d\varphi \cdots \text{(y-Axe)}.$$

16. **Zweite Guldinsche Regel.** Das Volumen, das durch die rotierende Fläche F entsteht, ist gleich dem Produkt aus dieser Fläche mal dem Weg des Flächenschwerpunktes.

17. Volumen eines beliebigen Körpers. Als Volumelement nimmt man wenn möglich eine Scheibe, deren Querschnitt Q als Funktion nur von x (oder einer anderen Variablen allein) dargestellt werden kann, wenn dx die unendlich kleine Höhe der Scheibe ist. Dann ist

$$V = \int_{x_0}^{x_1} Q \, dx.$$

18. Volumen eines Körpers, begrenzt durch die Fläche $z = f(x, y)$ oben, die z-Ebene unten, die Ebenen $x = a$, $x = b$ seitlich und die Ebenen $y = c$, $y = d$ vorn und hinten. Der unendlich kleine Quader ist $d^3V = dx\,dy\,dz$,

die unendlich dünne Säule (als Integral der Quader in der z-Richtung) ist $d^2V = z\,dx\,dy$, die unendlich dünne Scheibe (als Integral der Säulen in der y-bezw. x-Richtung) ist

$$dV = dx \int_{y=c}^{y=d} z\,dy \quad \text{bezw.} \quad dV = dy \int_{x=a}^{x=b} z\,dx,$$

das Volumen (als Integral der Scheiben) ist

$$V = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=c}^{y=d} z\,dx\,dy = \int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=c}^{y=d} z\,dy = \int_{y=c}^{y=d} dy \int_{x=a}^{x=b} z\,dx.$$

19. Volumen, begrenzt durch die Fläche $z = f(x, y)$ oben, die z-Ebene unten, durch die Ebenen $x = a$, $x = b$ seitlich und die Zylinderflächen $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ vorn und hinten.

$$d^3V = dx\,dy\,dz, \qquad d^2V = z\,dx\,dy,$$

$$dV = dx \int_{y_1=f_1(x)}^{y_2=f_2(x)} z\,dy, \qquad V = \int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y_1=f_1(x)}^{y_2=f_2(x)} z\,dy.$$

20. Volumen, begrenzt durch die Fläche $z = f(x, y)$ oben, die z-Ebene unten und seitlich durch den Zylinder $F(x, y) = 0$.

$$d^3V = dx\,dy\,dz, \qquad d^2V = z\,dx\,dy,$$

$$dV = dx \int_{y=y_1}^{y=y_2} z\,dy, \qquad V = \int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=y_1}^{y=y_2} z\,dy.$$

$x = a$ und $x = b$ sind den Zylinder berührende und ihn begrenzende Ebenen, y_1 und y_2 sind die Werte von y aus $F(x, y) = 0$ an der allgemeinen Stelle x.

21. Volumen, begrenzt durch zwei Flächen $z = \Phi(x, y)$ unten und $z = \Psi(x, y)$ oben und den Zylinder $F(x, y) = 0$ seitlich.

$$d^3V = dx\,dy\,dz, \qquad d^2V = (\Psi - \Phi)\,dx\,dy,$$

$$dV = dx \int_{y=y_1}^{y=y_2} (\Psi - \Phi)\,dy, \quad V = \int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=y_1}^{y=y_2} (\Psi - \Phi)\,dy.$$

a, b, y_1 und y_2 wie 20.

22. Volumen, begrenzt durch zwei Flächen $z = \Phi(x, y)$ unten und $z = \Psi(x, y)$ oben. Die beiden Flächen schneiden sich in einer Raumkurve, deren Projektion auf die z-Ebene $F(x, y) = 0$ ist. Der Projektionszylinder tritt jetzt an Stelle des begrenzenden Zylinders von 21.

$$d^3 V = dx\,dy\,dz, \qquad d^2 V = (\Psi - \Phi)\,dx\,dy,$$

$$dV = dx \int_{y=y_1}^{y=y_2} (\Psi - \Phi)\,dy, \quad V = \int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=y_1}^{y=y_2} (\Psi - \Phi)\,dy.$$

a, b, y_1, y_2 wie 20.

23. Volumen, begrenzt durch die geschlossene Fläche $\Phi(x, y, z) = 0$. An Stelle des begrenzenden Zylinders der Formeln 21 und 22 tritt jetzt der Umrißzylinder $F(x, y) = 0$.

$$d^3 V = dx\,dy\,dz, \qquad d^2 V = (z_2 - z_1)\,dx\,dy,$$

$$dV = dx \int_{y=y_1}^{y=y_2} (z_2 - z_1)\,dy, \quad V = \int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=y_1}^{y=y_2} (z_2 - z_1)\,dy.$$

a, b, y_1, y_2 wie vorher, z_2 und z_1 sind die Werte von z aus $\Phi(x, y, z) = 0$ an der allgemeinen Stelle x, y.

e) Schwerpunkt und statisches Moment.

24. **Schwerpunktsatz.** m_1, m_2, $m_3, \cdots$ sind Massenteilchen; $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3, \cdots$ die von einem festen Anfangspunkt zu diesen gezogenen Vektoren (siehe Vektoren),

$$M = \sum m = m_1 + m_2 + \cdots$$

die Gesamtmasse, $\mathfrak{s}$ der vom Anfangspunkt 0 aus zum Schwerpunkt gezogene Vektor.

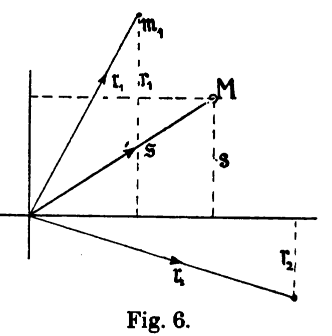


Fig. 6.

$$M\mathfrak{s} = \sum m\mathfrak{r}.$$

25. Projiziert man alle Vektoren auf eine durch den Anfangspunkt 0 gehende Axe (in Figur 6 die Lotrechte), so erhält man die analytische Form des Satzes

$$Ms = \sum mr.$$

s ist die Projektion von $\mathfrak{s}$ auf die Axe, r diejenige von $\mathfrak{r}$.

26. Bestimmt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem durch zwei Vertikale in 0, oder im Fall eines räumlichen Problems durch drei Vertikale in 0, so nimmt der Schwerpunktsatz die Form an

$$M\xi = \sum mx, \quad M\eta = \sum my, \quad M\zeta = \sum mz.$$

$\xi|\eta$ bezw. $\xi|\eta|\zeta$ sind die Koordinaten des Schwerpunktes, $x|y$ bezw. $x|y|z$ die des einzelnen Massenpunktes; $\sum mr$, $\sum mx$, $\sum my$, $\sum mz$ nennt man das **statische Moment** oder **Drehmoment** des untersuchten Körpers (= Bogen, Fläche, Volumen etc.) für die jeweilige Axe als gedachte Drehaxe.

27. Statisches Moment des ebenen Bogens s zwischen den Grenzordinaten x_0 und x_1. Das Bogenelement ds hat das statische Moment y ds für die x-Axe und x ds für die y-Axe. Der Bogen s hat das Drehmoment

$$D_x = \int y\, ds = \int_{x_0}^{x} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \cdots (x\text{-Axe}),$$

$$D_y = \int x\, ds = \int_{x_0}^{x} x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \cdots (y\text{-Axe}).$$

28. Statisches Moment des ebenen Bogens s zwischen den Grenzradienvektoren φ_0 und φ. Das Bogenelement ds hat bei Polarkoordinaten das statische Moment $ds \cdot r\cos\varphi$ für die y-Axe und $ds \cdot r\sin\varphi$ für die x-Axe. Der Bogen s hat das Drehmoment

$$D_x = \int_{\varphi_0}^{\varphi} r \sin\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi \cdots (x\text{-Axe}),$$

$$D_y = \int_{\varphi_0}^{\varphi} r \cos\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi \cdots (y\text{-Axe}).$$

29. Schwerpunkt $\xi|\eta$ des ebenen Bogens s

$$\xi s = D_y, \quad \eta s = D_x.$$

30. Statisches Moment der Fläche F zwischen den Grenzordinaten x_0 und x. Das Flächenelement dF hat das Drehmoment $\frac{1}{2}$ y dF für x-Axe und x dF für die y-Axe. Die Fläche F hat das Drehmoment

$$D_x = \frac{1}{2}\int y\,dF = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} y^2\,dx \cdots\cdot (\text{x-Axe}),$$

$$D_y = \int x\,dF = \int_{x_0}^{x} xy\,dx \cdots\cdot (\text{y-Axe}).$$

31. Statisches Moment der Fläche F zwischen den Grenzradienvektoren φ_0 und φ. Das Flächenelement dF hat bei Polarkoordinaten das Drehmoment $^2/_3\, r \sin\varphi\, dF$ für die x-Axe und $^2/_3\, r \cos\varphi\, dF$ für die y-Axe. Die Fläche F hat das Drehmoment

$$D_x = \frac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^3 \sin\varphi\, d\varphi \cdots\cdot (\text{x-Axe}),$$

$$D_y = \frac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^3 \cos\varphi\, d\varphi \cdots\cdot (\text{y-Axe}).$$

32. Schwerpunkt $\xi|\eta$ der Fläche F.

$$\xi F = D_y, \quad \eta F = D_x.$$

33. Der Schwerpunkt der Rotationsoberfläche O liegt auf der Rotationsaxe; vom Abstand ξ vom Ursprung gilt

$$\xi O = 2\pi \int xy\,ds = 2\pi \int_{x_0}^{x} xy \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

34. Der Schwerpunkt des Rotationsvolumens V liegt auf der Rotationsaxe; vom Abstand ξ vom Ursprung gilt

$$\xi V = \pi \int_{x_0}^{x} xy^2\,dx.$$

f) Trägheitsmoment.

35. Trägheitsmoment einer Strecke L. Das Streckenelement dL mit der Masse m hat für die x-Axe das Trägheitsmoment $d\Theta_x = my^2$.

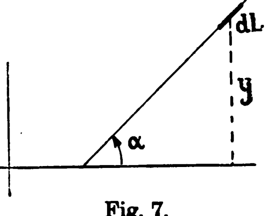


Fig. 7.

Die Strecke L mit der über die ganze Länge gleichförmig verteilten Masse $M = L\mu$, wenn μ die Masse pro

Längeneinheit ist, hat für die x-Axe das Trägheitsmoment

$$\Theta_x = \frac{1}{3} M L^2 \sin^2 \alpha \cdots\cdots (m = \mu\, dL).$$

36. **Trägheitsmoment einer Fläche.** Wenn die Masse pro Flächeneinheit gleich 1 angenommen wird, hat das Flächenelement dF das Trägheitsmoment

$$d\Theta_x = {}^1/_3\, y^3\, dx \quad \text{und} \quad d\Theta_y = x^2 y\, dx,$$

die ganze Fläche F von x_0 bis x das Trägheitsmoment

$$\Theta_x = \frac{1}{3} \int_{x_0}^{x} y^3\, dx \cdots\cdots (\text{x-Axe}),$$

$$\Theta_y = \int_{x_0}^{x} x^2 y\, dx \cdots\cdots (\text{y-Axe}).$$

37. **Polares Trägheitsmoment der Fläche F** ist das Trägheitsmoment für eine durch den Anfangspunkt senkrecht zur Fläche stehende Axe.

$$\Theta_z = \Theta_x + \Theta_y = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{3} y^3 + x^2 y\right) dx.$$

38. **Trägheitsmoment einer Rotationsoberfläche** (Masse pro Flächeneinheit = 1 gesetzt).

$$d\Theta = 2\pi y\, ds \cdot y^2,$$

$$\Theta = 2\pi \int_{x_0}^{x} y^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

39. **Trägheitsmoment eines Rotationsvolumens** (Masse pro Volumeneinheit = 1 gesetzt). Die Kreisscheibe vom Radius y und der Dicke dx hat das Trägheitsmoment $d\Theta = {}^1/_2\, \pi y^4\, dx$. Der Rotationskörper von x_0 bis x hat das Trägheitsmoment

$$\Theta = \frac{\pi}{2} \int_{x_0}^{x} y^4\, dx.$$

VI. Elemente der analytischen Geometrie der Ebene.

A. Gerade und Kegelschnitte in kartesischen und Polarkoordinaten.

§ 64. Koordinatentransformation.

1. **Koordinatenbegriff:** Kartesische Koordinaten siehe § 5.

Die Fixelemente eines **Polarkoordinatensystems** sind der **Anfangspunkt** und der **Anfangsstrahl.** Polarkoordinaten sind r und φ; dabei bedeutet $P = r|\varphi$ bezw. $P = 3|2$: P hat vom Anfangspunkt die Entfernung r bezw. 3 und vom Anfangsstrahl die Bogenentfernung φ bezw. 2, d. h. der Winkel vom Anfangsstrahl bis zum Radiusvektor nach P hat als Bogenmaß φ bezw. 2)

2. **Parallelverschiebung.** Der neue Ursprung hat gegenüber dem alten System die Koordinaten $x_0|y_0$. Die alten Koordinaten seien $x|y$, die neuen $x'|y'$.

$$\left.\begin{array}{l} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{array}\right\} . \qquad \left.\begin{array}{l} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{array}\right\} .$$

3. **Drehung des rechtwinkligen Systems** um den Winkel φ.

$$\left.\begin{array}{l} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \end{array}\right\} . \qquad \left.\begin{array}{l} x' = x \cos\varphi + y \sin\varphi \\ y' = -x \sin\varphi + y \cos\varphi \end{array}\right\} .$$

4. **Rechtwinklige und schiefwinklige Koordinaten.** α ist der Winkel von der x-Axe zur x'-Axe, β der Winkel von der x-Axe zur y'-Axe.

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos\beta \\ y &= x' \sin\alpha + y' \sin\beta \end{aligned}\right\}.$$

$$\left.\begin{aligned} x' \sin(\beta - \alpha) &= x \sin\beta - y \cos\beta \\ y' \sin(\beta - \alpha) &= - x \sin\alpha + y \cos\alpha \end{aligned}\right\}.$$

5. **Parallelverschiebung und Drehung.** Superposition aus 2 und 3 bezw. 4.

6. **Rechtwinklige und Polarkoordinaten.**

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos\varphi \\ y &= r \sin\varphi \end{aligned}\right\}. \qquad \left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\}.$$

7. **Schiefwinklige und Polarkoordinaten.** Wenn ω der Axenwinkel, so ist

$$\left.\begin{aligned} x \sin\omega &= r \sin(\omega - \varphi) \\ y \sin\omega &= r \sin\varphi \end{aligned}\right\}. \qquad \left.\begin{aligned} r \sin\varphi &= y \sin\omega \\ r \cos\varphi &= x + y \cos\omega \\ r^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \cos\omega \end{aligned}\right\}.$$

§ 65. Strecke.

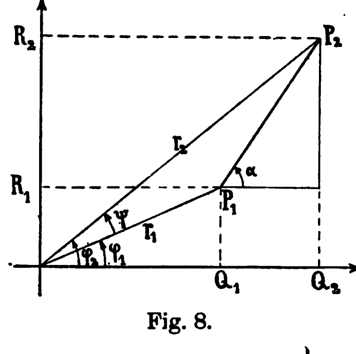


Fig. 8.

1. Bezeichnet man mit r den **Radiusvektor** von P, d. i. den Fahrstrahl von 0 nach P, mit φ den **Richtungswinkel** von 0P, d. i. den Winkel von der x-Axe aus im positiven Sinn (in der Mathematik ist das nach willkürlicher Festsetzung der Gegenuhrzeigersinn) zur Strecke 0P, so gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos\varphi \\ y &= r \sin\varphi \end{aligned}\right\}. \qquad \left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\}.$$

x und y sind die **Projektionen des Radiusvektors** auf die x- bezw. y-Axe. Insofern man das Vorzeichen von x und y mit-

zählt oder nicht, hat man den **Richtungssinn** der Strecke $0P$, d. i. die Richtung von 0 nach P, mitberücksichtigt oder nicht.

Als **Richtung einer Strecke** definiert man die trigonometrische Tangente des Richtungswinkels, die Richtung des Radiusvektors $0P$ ist also $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

2. Liegen P_1 und P_2 auf der x-Axe bezw. y-Axe, so ist unter Berücksichtigung des Richtungssinnes die **Entfernung** von P_1 nach P_2

$$P_1P_2 = x_2 - x_1 = X \quad \text{bezw.} \quad P_1P_2 = y_2 - y_1 = Y.$$

3. Sind P_1 und P_2 durch die Bögen φ_1 und φ_2 auf einem Kreis festgelegt, so ist ihre **Winkelentfernung**

$$P_1P_2 = \varphi_2 - \varphi_1 = \Phi.$$

4. Liegen P_1 und P_2 beliebig in der Ebene, so sind unter Berücksichtigung des Richtungssinnes die **Projektionen** auf die x- bezw. y-Richtung (Fig. 8)

$$Q_1Q_2 = x_2 - x_1 = X \quad \text{bezw.} \quad R_1R_2 = y_2 - y_1 = Y.$$

5. Vernachlässigt man den Richtungssinn, so gilt, wenn $P_1P_2 = d$,

$$Q_1Q_2 = d\cos\alpha \quad \text{bezw.} \quad R_1R_2 = d\cos(90^\circ - \alpha),$$

d. h. die **Projektion einer Strecke** d auf eine Gerade ist gleich dem Produkt aus Originalstrecke mal dem Kosinus des Neigungswinkels.

6. Der Richtungswinkel der Strecke P_1P_2 ist α, die **Richtung von P_1P_2** also

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{Y}{X} = \frac{\text{y-Projektion}}{\text{x-Projektion}}.$$

7. Ohne Rücksichtnahme auf den Richtungssinn ist die **Entfernung zweier Punkte P_1 und P_2**

$$P_1P_2 = (\pm)\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{X^2 + Y^2} = R,$$

d. h. die Strecke P_1P_2 ist gleich der Wurzel aus der Summe der Quadrate der x- und y-Projektionen.

Entfernung P_1P_2 in schiefwinkligen Koordinaten, wenn ω der Axenwinkel.

$$d = (\pm)\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega}.$$

Entfernung P_1P_2 in Polarkoordinaten.

$$d = (\pm)\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

8. **Winkel ψ der Radienvektoren** r_1 und r_2.

$$\left.\begin{aligned}\sin\psi &= \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{r_1r_2}\\ \cos\psi &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{r_1r_2}\end{aligned}\right\}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1x_2 + y_1y_2}.$$

9. **Teilungsverhältnis.** Der Teilpunkt $P = x|y$ auf der Strecke P_1P_2 oder auf deren Verlängerung teilt die Strecke P_1P_2 im Verhältnis $\lambda = PP_1 : PP_2$ (Def.).

Kennt man außer den Koordinaten von P_1 und P_2 auch noch die von P, so erhält man

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2}.$$

Ist außer P_1 und P_2 noch λ bekannt, so erhält man

$$x = \frac{\lambda x_2 - x_1}{\lambda - 1} \text{ und } y = \frac{\lambda y_2 - y_1}{\lambda - 1},$$

bezw. wenn $\lambda = m : n$,

$$x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n} \text{ und } y = \frac{my_2 - ny_1}{m - n}.$$

Festsetzung. Liegt der Teilpunkt P auf der Strecke P_1P_2 (= innere Teilung), so wird λ negativ; positiv aber, wenn P außerhalb P_1P_2 liegt (= äußere Teilung).

10. **Mittelpunkt einer Strecke.** Seine Koordinaten $x|y$ sind das arithmetische Mittel der Koordinaten der Endpunkte.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

§ 66. Dreieck und Vieleck. Punktsystem.

1. Wird eine beliebige Fläche so umlaufen, daß die Fläche immer links liegt, so hat sie positiven Inhalt (Def.).

2. $\triangle ABC = -\triangle ACB$

oder $\triangle ABC + \triangle ACB = 0.$

3. Das **Dreieck,** das der Ursprung mit zwei Punkten P_1 und P_2 bildet, hat den Inhalt (Fig. 8)

$$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

4. **Dreiecksfläche** $P_1 P_2 P_3$.

$$\triangle P_1 P_2 P_3 = {}^1/_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1) + {}^1/_2 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + {}^1/_2 (x_3 y_1 - x_1 y_3)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Die Koordinaten des Schwerpunktes der Dreiecksfläche sind das arithmetische Mittel der Koordinaten der Eckpunkte.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

6. Die **Projektion eines Polygons** $P_1 P_2 \cdots P_n$ auf irgend eine Gerade ist Null, wenn man den einzelnen Seiten $P_1 P_2$, $P_2 P_3$ etc. und damit ihren Projektionen einen Richtungssinn in der angegebenen Reihenfolge beilegt.

7. Die **Fläche des Polygons** $P_1 P_2 \cdots P_n$ ist

$$F = {}^1/_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1) + {}^1/_2 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \cdots + {}^1/_2 (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + {}^1/_2 (x_n y_1 - x_1 y_n).$$

8. **Schwerpunktsatz.** Die materiellen Punkte $P_1, P_2 \cdots$ mit den Massenteilchen $m_1, m_2 \cdots$ bilden das Massensystem M, dessen Schwerpunkt $S = \xi | \eta$ bestimmt ist durch

$$\xi = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots},$$

$$\eta = \frac{\Sigma my}{\Sigma m} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}.$$

$D_x = \Sigma my$ bezw. $D_y = \Sigma mx$ sind die Drehmomente der Gesamtmasse für die x- bezw. y-Axe als gedachte Drehaxe.

§ 67. Kurvengleichung.

1. **Kurve** ist eine wenigstens in Intervallen kontinuierliche Linie, deren einzelne Punkte gesetzmäßig aufeinanderfolgen.

2. Jede explizite oder implizite Funktion zweier Variablen kann durch eine ebene Kurve dargestellt werden. Jedem Wertepar $x|y$ der endlich und stetig vorausgesetzten Funktion $F(x, y) = 0$ ordnet man einen Punkt $P = x|y$ zu. Den unendlich vielen stetig und gesetzmäßig aufeinanderfolgenden Wertepaaren $x|y$ der Funktion entsprechen dann unendlich viele stetig und gesetzmäßig aufeinanderfolgende Punkte, die eine Kurve bilden. Man nennt dann die Funktion $F(x, y) = 0$ die Gleichung dieser Kurve (siehe 5).

3. Aufgabe der **Kurvendiskussion:** Zu einer gegebenen Gleichung die sie darstellende Kurve und deren Eigenschaften aufsuchen, oder zu einer durch ihre Eigenschaften gegebenen Kurve die Gleichung auffinden und aus dieser neue Eigenschaften ableiten.

4. Der **laufende Punkt** einer Kurve ist der allgemeine Punkt der Kurve. Was vom laufenden Punkt gilt, gilt auch von den speziellen Punkten. Gewöhnlich bezeichnet man den laufenden Punkt mit $P = x|y$, spezielle Punkte durch Indices $P_0 = x_0|y_0$, $P_1 = x_1|y_1$ etc.

5. **Gleichung einer Kurve** ist der analytische Ausdruck der Eigenschaften des laufenden Punktes bezw. seiner Koordinaten.

6. Der Punkt $P_1 = x_1|y_1$ liegt auf der Kurve $F(x, y) = 0$, wenn von ihm dasselbe wie vom laufenden Punkt gilt, d. h. wenn $F(x_1, y_1) = 0$. Man sagt: $P_1 = x_1|y_1$ muß die Kurvengleichung erfüllen.

§ 68. Geradengleichungen.

1. **Gerade durch zwei gegebene Punkte P_1 und P_2.**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

oder

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$x = \frac{\lambda x_2 - x_1}{\lambda - 1}, \qquad y = \frac{\lambda y_2 - y_1}{\lambda - 1}$$

(Parameterdarstellung).

Parameter: Verfügbare Konstante, meist derart, daß jedem ihrer Werte ein bestimmtes geometrisches Gebilde zugeordnet ist, hier je ein Punkt. Siehe § 77.

2. Drei Punkte P_1, P_2 und P_3 liegen auf einer Geraden, wenn für sie gilt

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. **Abschnittsgleichung.** Gegeben sind die Abschnitte m und n auf der x- bezw. y-Axe.

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} - 1 = 0.$$

Charakteristisch an ihr ist, daß das absolute Glied, d. h. das von x und y freie, -1 ist.

4. **Normalgleichung.** Gegeben ist das Lot p vom Ursprung auf die Gerade und der Neigungswinkel α dieses Lotes (der bis 360° gezählt werden muß im Gegensatz zum Richtungswinkel, der nur bis 180° gezählt wird).

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

Symbolisch $N = 0$, wenn N ein Symbol, eine Abkürzung für

$$x \cos \alpha + y \sin a - p$$

ist. Die geometrische Deutung von N siehe § 69. 6.

Charakteristisch an der Normalgleichung ist: Die Koeffizienten von x und y geben quadriert und addiert 1.

5. **Richtungsgleichung.** Gegeben ist die Richtung $\lambda = \operatorname{tg}\varphi$ der Geraden und der Abschnitt n auf der y-Axe.

$$y = x \operatorname{tg}\varphi + n.$$

6. **Gerade durch P_0 mit gegebener Richtung** $\lambda = \operatorname{tg}\varphi$.

$$y - y_0 = \operatorname{tg}\varphi \cdot (x - x_0).$$

7. **Gerade durch den Nullpunkt** mit der Richtung $\lambda = \operatorname{tg}\varphi$.

$$y = \lambda x.$$

Charakteristisch ist das Fehlen des absoluten Gliedes.

8. **Allgemeine Geradengleichung.**

$$ax + by + c = 0.$$

Symbolisch $G = 0$, wenn G ein Symbol für $ax + by + c$ ist.

Diskussion der allgemeinen Geradengleichung. Man bringt die allgemeine Gleichung auf die Abschnittsgleichung und findet die Abschnitte auf den Axen

$$m = -\frac{c}{a}, \quad n = -\frac{c}{b}.$$

Man bringt die allgemeine Gleichung auf die Richtungsgleichung und findet die Richtung der Geraden

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{a}{b}.$$

Man bringt die allgemeine Gleichung auf die Normalgleichung, indem man sie mit $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$ dividiert, und findet

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad p = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2 \pm b^2}}.$$

Festsetzung: Das Vorzeichen der Wurzel ist entgegengesetzt dem von c.

$a = 0$ Parallele zur x-Axe: $by + c = 0$ oder $y = B$;
$a = 0,\ c = 0$ x-Axe: $y = 0$;
$b = 0$ Parallele zur y-Axe: $ax + c = 0$ oder $x = A$;
$b = 0,\ c = 0$ y-Axe: $x = 0$;
$c = 0$ Gerade durch $0|0$: $ax + by = 0$ oder $y = \lambda x$;
$a = 0,\ b = 0$ Unendlich ferne Gerade.

9. **Unendlich ferne Punkte.** Jede Gerade hat einen und nur einen unendlich fernen Punkt (Definition).

Die **unendlich ferne Gerade** ist die Gesamtheit aller unendlich fernen Punkte (Definition).

10. **Geradengleichung in schiefwinkligen Koordinaten.**
Gerade durch zwei Punkte P_1 und P_2: wie 1.
Abschnittsgleichung: wie 3.
Gerade durch P_0 mit geg. Richtungswinkel φ.

$$y - y_0 = \frac{\sin \varphi}{\sin(\omega - \varphi)}(x - x_0).$$

Gerade durch den Nullpunkt mit geg. Richtungswinkel φ.

$$y = x \frac{\sin \varphi}{\sin(\omega - \varphi)}.$$

Allgemeine Geradengleichung: wie 8.

11. **Geradengleichung in Polarkoordinaten.**
Gerade durch $P_1 = r_1 | \varphi_1$ und $P_2 = r_2 | \varphi_2$.

$$r r_1 \sin(\varphi - \varphi_1) + r r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi) + r_1 r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

Gerade durch P_0 mit gegebenem Richtungswinkel ψ.

$$r \sin(\varphi - \psi) = r_0 \sin(\varphi_0 - \psi).$$

Allgemeine Geradengleichung, zugleich Normalform, auf welche sich jede Geradengleichung bringen läßt.

$$r \cos(\varphi - \alpha) = p.$$

p ist der Abstand des Nullpunktes von der Geraden, $m = \frac{p}{\cos \alpha}$ der Abschnitt auf dem Anfangsstrahl, α der Neigungswinkel des Lotes p, $-\operatorname{cotg} \alpha$ die Richtung $\operatorname{tg} \psi$ der Geraden.

§ 69. Gerade und Gerade. Gerade und Punkt.

Die beiden Geraden seien entweder in der Normalform vorausgesetzt:

$$N_1 \equiv x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0,$$
$$N_2 \equiv x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0,$$

oder in der allgemeinen Gleichungsform:

$$G_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$
$$G_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0.$$

Übergang: $$N = \frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{G}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1. **Winkel ψ zweier Geraden** ist der Winkel von der ersten zur zweiten im positiven Sinn, also $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$.

a) Normalform: $\psi = \alpha_2 - \alpha_1$.

b) Allgemeine Gleichung: $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}$.

$G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ **parallel,** wenn $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ oder $\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\varphi_1$.

$G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ **senkrecht,** wenn $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ oder $\operatorname{tg}\varphi_2 = -\dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}$.

2. **Parallele** zu $G \equiv ax + by + c = 0$.

$$ax + by + c' = 0.$$

3. **Senkrechte** zu $G \equiv ax + by + c = 0$.

$$bx - ay + c' = 0.$$

4. **Schnittpunkt P_0 zweier Geraden.**

$$\left.\begin{array}{l} G_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ G_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{array}\right\} \text{siehe lineare Gleichungen.}$$

$$x_0 : y_0 : 1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= (b_1 c_2 - b_2 c_1) : (c_1 a_2 - c_2 a_1) : (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

5. Drei Gerade $\left\{\begin{array}{l} G_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ G_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \\ G_3 \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 = 0 \end{array}\right.$

schneiden sich in einem Punkt, wenn die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

des Gleichungssystems verschwindet.

Dann müssen sich drei Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ finden lassen, so daß

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 = 0.$$

6. **Abstand d des Punktes P_0 von der Geraden.**

a) Normalform. P_0 hat von der Geraden $N = 0$ den Abstand

$$d = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p.$$

Geometrische Bedeutung von N: Ein variabler Punkt $P = x|y$ hat von der Geraden $N = 0$ den Abstand N.

b) Allgemeine Gleichung. P_0 hat von der Graden $G = 0$ den Abstand

$$d = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Geometrische Bedeutung von G: G ist der Abstand des variablen Punktes $P = x|y$ von der Geraden $G = 0$, multipliziert mit dem konstanten Faktor $\pm \sqrt{a^2 + b^2}$.

Der Nullpunkt hat von jeder Geraden, die nicht durch ihn hindurchgeht, negativen Abstand. Durch eine Gerade wird das ebene Gebiet in zwei Hälften zerlegt; die Punkte, die auf derselben Seite wie der Ursprung liegen, haben negativen Abstand von der Geraden.

7. **Geraden-** oder **Strahlenbüschel** durch P ist die Gesamtheit aller Geraden der Ebene durch diesen Punkt P, den Träger des Büschels.

a) Geradenbüschel durch den Schnittpunkt von $N_1 = 0$ mit $N_2 = 0$.

$$N_1 - \lambda N_2 = 0.$$

λ heißt der Parameter; jedem Wert von λ ist eine Gerade zugewiesen und umgekehrt; λ darf nur linear vorkommen.

$$\lambda = \frac{N_1}{N_2}$$

stellt das **Verhältnis der Abstände** des laufenden Punktes der Büschelgeraden $N_1 - \lambda N_2 = 0$ von den beiden Grundgeraden $N_1 = 0$ und $N_2 = 0$ vor.

b) Geradenbüschel durch den Schnittpunkt von $G_1 = 0$ mit $G_2 = 0$.

$$G_1 - \lambda G_2 = 0.$$

c) Geradenbüschel durch den Punkt $P_0 = x_0 | y_0$.

$$y - y_0 = \lambda (x - x_0).$$

Der Parameter λ stellt die Richtung der einzelnen Büschelgeraden vor.

8. **Winkelhalbierende zweier Geraden.**

a) Normalform. Zu $N_1 = 0$ und $N_2 = 0$ ist sie (innere und äußere Winkelhalbierende)

$$N_1 \pm N_2 = 0.$$

b) Allgemeine Gleichung. Zu $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ ist sie

$$\frac{G_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{G_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0.$$

9. **Geradenschar** ist der Verein aller jener Geraden, welche eine gegebene Kurve umhüllen. (Das Büschel ist ein spezieller Fall der Schar.)

$$x\,u(\lambda) + y\,v(\lambda) + w(\lambda) = 0.$$

u, v und w sind beliebige Funktionen des Parameters λ.

§ 70. Gemeinsame Entstehung aller Kegelschnitte.

(Siehe hiezu Kurvendiskussion §§ 83 und 85.)

1. Alle Kurven zweiter Ordnung heißen **Kegelschnitte.**

2. Jeder Kegelschnitt hat zwei reelle oder imaginäre unendlich ferne Punkte, also auch zwei reelle oder imaginäre **Asymptoten.**

Die **Ellipse** hat zwei imaginäre, die **Hyperbel** zwei reelle und verschiedene, die **Parabel** zwei zusammenfallende Asymptoten.

Der **Kreis** ist eine spezielle Ellipse.

3. Ellipse, Hyperbel und Parabel werden aus einem Kegel (der mathematische Kegel setzt sich von der Spitze aus nach zwei Seiten fort) durch Ebenen ausgeschnitten. Die Parabel

ergibt sich als Übergangskurve von der Ellipse zur Hyperbel. Geht die schneidende Ebene durch die Spitze des Kegels, so ergeben sich die **degenierten** oder **ausgearteten Kegelschnitte,** (das sind Geradenpaare), und zwar das Paar reeller sich schneidender Geraden als Ausartung der Hyperbel, das Paar reeller paralleler Geraden, speziell zusammenfallender, als Ausartung der Parabel, das imaginäre Geradenpaar als Ausartung der Ellipse.

4. Ellipse und Hyperbel sind **Mittelpunktskurven; Mittelpunkt** ist der Punkt, der jede Sehne durch ihn halbiert. Die Parabel hat keinen Mittelpunkt (bezw. sie hat ihren Mittelpunkt im Unendlichen).

5. Der geometrische Ort aller Punkte P, deren Abstände von einem festen Punkt F und einer festen Geraden D ein konstantes Verhältnis $PF : PQ = \varepsilon$ haben, ist ein Kegelschnitt. Der feste Punkt F heißt **Brennpunkt,** die feste Gerade **Direktrix** des Kegelschnitts, das Verhältnis ε die **numerische Exzentrizität.** Man erhält eine Ellipse, Parabel, Hyperbel, je nachdem $\varepsilon < 1$, $= 1$, > 1 ist. Für den Kreis ist $\varepsilon = 0$, d. h. die Direktrix ist unendlich fern.

6. Bezeichnet man mit d den Abstand des Brennpunktes F von der Direktrix, mit p die Ordinate in F (falls man die Gerade durch F senkrecht zur Direktrix als x-Axe wählt), und für den Fall, daß ein Mittelpunkt vorhanden, die **Axen,** d. s. die zwei Symmetriesehnen des Kegelschnitts, mit 2a und 2b, die **lineare Exzentrizität** oder **Brennweite,** d. i. der Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt, mit e, so hat man für die sechs Größen ε, p, d, a, b, e die Gleichungen (vier unabhängige)

$$e = a\varepsilon, \quad p = \varepsilon d, \quad \pm b^2 = e d,$$

$$\varepsilon d = a(1 - \varepsilon^2), \quad e^2 = a^2 \mp b^2, \quad \varepsilon^2 d^2 = \pm b^2(1 - \varepsilon^2).$$

Das obere Vorzeichen gilt hier wie fortan für die Ellipse, das untere für die Hyperbel. Mit diesen Gleichungen lassen sich aus zwei der obigen Größen die andern ermitteln.

7. **Gemeinsame Scheiteltangentengleichung** der drei Kegelschnitte.

$$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2.$$

8. **Gemeinsame Polarkoordinatengleichung** der drei Kegelschnitte. Der Brennpunkt (F_2 in Figur 11) ist Pol, die große Axe Anfangsstrahl.

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

9. **Brennstrahlen** eines Kegelschnittpunktes P_0 heißen die Radienvektoren von den zwei Brennpunkten nach P_0. Die zwei Brennstrahlen schließen mit der Tangente bezw. Normalen jedesmal den gleichen Winkel ein.

10. **Satz von Paskal.** Ist ein Sechseck mit den Seiten 1, 2, 3, 4, 5, 6 einem Kegelschnitt einbeschrieben, so liegen die drei Schnittpunkte (1, 4), (2, 5), (3, 6) der drei Gegenseitenpaare auf der nämlichen Geraden (**Paskal**sche **Gerade**).

11. **Satz von Brianchon.** Ist ein Sechseck mit den Ecken 1, 2, 3, 4, 5, 6 einem Kegelschnitt umschrieben, so gehen die drei Verbindungsgeraden (1, 4), (2, 5), (3, 6) der drei Gegeneckpaare durch den nämlichen Punkt (**Brianchon**scher **Punkt**).

§ 71. Allgemeine Kegelschnittsgleichung. Diskussion derselben.

1. Jede Gleichung zweiten Grades stellt einen Kegelschnitt dar. Die allgemeinste Gleichung zweiten Grades, symbolisch $S = 0$, ausgeführt

$$S \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

enthält fünf willkürliche Konstante. Durch fünf Bedingungen ist stets eine endliche Zahl von Kegelschnitten bestimmt. Durch fünf Punkte allgemeiner Lage läßt sich stets nur ein Kegelschnitt legen; dessen Konstruktion erfolgt nach dem Paskalschen Satz. Soll ein Kegelschnitt konstruiert werden, der fünf gegebene Gerade berührt, so geschieht dies nach dem Brianchonschen Satz.

2. Sind einem Kegelschnitt nur vier Bedingungen vorgeschrieben, so ist dadurch ein **Kegelschnittsystem** bestimmt. Alle Kegelschnitte speziell, die durch vier gegebene Punkte gehen,

bilden ein **Kegelschnittbüschel;** alle Kegelschnitte, die die nämlichen vier Geraden berühren, bilden eine **Kegelschnittschar.**

3. Die **Asymptotenrichtung** des Kegelschnitt S ist, wenn

$$a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = A_{33},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-A_{33}}}{a_{22}}.$$

4. Solange der Kegelschnitt, d. h. sein Mittelpunkt und seine Axen, gegenüber dem Koordinatensystem von allgemeiner Lage ist, wird auch seine Gleichung $S = 0$ allgemeine Form haben.

5. Wählt man den Mittelpunkt des Kegelschnitts als Nullpunkt, so verschwinden die linearen Glieder der allgemeinen Gleichung $S = 0$ und umgekehrt stellt jede Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

einen Kegelschnitt vor, dessen Mittelpunkt der Ursprung ist.

6. Wählt man irgend zwei konjugierten Durchmessern (siehe Polarsätze) parallele Gerade als Koordinatenaxen, so wird $a_{12} = 0$ und umgekehrt stellt jede Gleichung

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

einen Kegelschnitt dar, dessen Durchmesser parallel zu den Koordinatenaxen konjugierte Durchmesser sind.

7. Wählt man den Mittelpunkt des Kegelschnitts als Anfangspunkt und irgend zwei konjugierte Durchmesser als schiefwinklige oder rechtwinklige Koordinatenaxen, so ist die Kegelschnittsgleichung von der Form

$$Ax^2 + By^2 + C = 0,$$

und umgekehrt stellt jede solche Gleichung einen Kegelschnitt dar, dessen Mittelpunkt mit dem Ursprung zusammenfällt, und für den die Koordinatenaxen konjugierte Durchmesser sind.

8. Die durch die Konstanten a_{ik} des Kegelschnitts definierte **Kegelschnittsdeterminante** (= Diskriminante der Gleichung $S = 0$) A gibt nebst den Unterdeterminanten A_{31}, A_{32}, A_{33} von a_{31}, a_{32}, a_{33} Aufschluß über die Eigenschaften des Kegelschnitts (Asymptoten, Axenrichtung und Axengröße, Mittel-

punkt, einfachste Gleichung usw.). $a_{ik} = a_{ki}$ vorausgesetzt (also $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$), wird

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

$$A_{31} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}, \quad A_{32} = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23},$$
$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2.$$

9. Solange A von Null verschieden, stellt die Gleichung $S = 0$ einen wirklichen Kegelschnitt dar.

10. $A = 0$ ist die Bedingung dafür, daß der Kegelschnitt in ein Geradenpaar ausartet.

11. $S = 0$ stellt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel vor, je nachdem $A_{33} > 0$, $A_{33} < 0$, $A_{33} = 0$.

12. **Diskussionstabelle.**

I. Eigentliche (= nicht zerfallende) Kegelschnitte, $A \lessgtr 0$.

$A_{33} > 0$		$A_{33} < 0$	$A_{33} = 0$
$a_{11}A$ bezw. $a_{22}A$			
>0 Imaginäre Kurve	<0 Ellipse	Hyperbel	Parabel

II. Geradenpaare = zerfallende Kegelschnitte, $A = 0$.

$A_{33} > 0$	$A_{33} < 0$	$A_{33} = 0$		
Imaginäres Geradenpaar mit reellem Schnittpunkt im Endlichen	Reelles Geradenpaar mit Schnittpunkt im Endlichen	Paralleles Geradenpaar A_{11} bezw. A_{22}		
		>0 Imaginäres paralleles Geradenpaar	$=0$ Zusammenfallendes paralleles Geradenpaar	<0 Reelles nicht zusammenfallendes paralleles Geradenpaar

13. Die Gleichung $(ax + by)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ stellt immer eine Parabel dar und umgekehrt läßt sich jede Parabelgleichung auf diese Form bringen (siehe 22).

14. **Axen** eines Kegelschnitts sind die zwei zu einander senkrechten konjugierten Durchmesser. (Siehe § 70. 6). Die eine Axe der Parabel liegt wie der Mittelpunkt im Unendlichen.

15. Die **Axenrichtungen** eines Kegelschnitts $S = 0$ sind bestimmt, wenn φ der Winkel einer Axe, durch

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Bei der Parabel wird daraus

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

16. Wählt man die zwei Axenrichtungen durch einen beliebigen Punkt als Koordinatenaxen, so transformiert sich beim Übergang zu diesem Koordinatensystem die allgemeine Gleichung $S = 0$ in

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

λ_1 und λ_2 sind die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + A_{33} = 0.$$

Bei der Parabel wird eine der beiden Wurzeln λ_1 zu Null, die andere $\lambda_2 = a_{11} + a_{22}$. Dreht man also das Koordinatensystem um den Winkel φ, so daß eine der Axenrichtungen Koordinatenaxe wird, so transformiert sich die allgemeine Gleichung $S = 0$ in

$$\lambda_2 y^2 + 2mx + 2ny + a_{33} = 0.$$
$$m = a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi,$$
$$n = -a_{13}\sin\varphi + a_{23}\cos\varphi.$$

Die Parabelaxe ist dann die x-Axe.

17. Der **Mittelpunkt** $M = x_0 | y_0$ der Mittelpunktskurven ist bestimmt durch

$$x_0 : y_0 : 1 = A_{31} : A_{32} : A_{33}.$$

18. Macht man den Mittelpunkt zum Ursprung, so geht die allgemeine Gleichung $S = 0$ über in

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

19. Macht man den Mittelpunkt zum Ursprung und die Kegelschnittsaxen zu Koordinatenaxen, so geht die allgemeine Gleichung $S = 0$ über in die **Mittelpunktsaxengleichung**

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

λ_1 und λ_2 wie 16. Die **Halbaxen** a und b sind bestimmt durch den Übergang auf die gewöhnliche Gleichungsform

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

20. Der **Scheitel** $P_0 = x_0 | y_0$ der Parabel ist bestimmt durch (m, n und λ wie 16)

$$x_0 : y_0 : 1 = (n^2 - \lambda a_{33}) : -2mn : 2m\lambda.$$

21. Macht man den Scheitel P_0 der Parabel zum Nullpunkt, die Parabelaxe zur x-Axe, so geht die allgemeine Gleichung über in die **Scheitelgleichung**

$$\lambda y^2 + 2mx = 0,$$

bezw. in die gebräuchliche Form

$$y^2 = 2px,$$

woraus dann p bestimmt werden kann.

22. Die durch die Gleichung

$$(ax + by)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

dargestellte Parabel geht durch den Schnittpunkt von

$$ax + by = 0 \text{ und } 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

und berührt dort die zweite Gerade; die erste Gerade

$$ax + by = 0$$

ist ein Parabeldurchmesser, bestimmt also die Axenrichtung (siehe 13).

§ 72. **Polarensätze.**

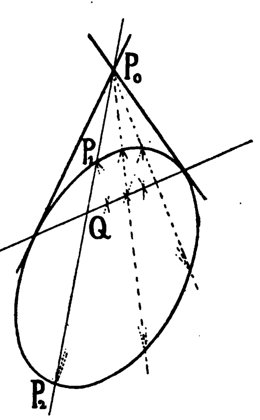


Fig. 9.

1. **Polare zu P_0 für einen gegebenen Kegelschnitt.** Legt man durch P_0 alle möglichen Strahlen, deren jeder den gegebenen Kegelschnitt in zwei Punkten P_1 und P_2 schneidet, und konstruiert auf jedem dieser Strahlen zu den schon vorhandenen drei Punkten P_0, P_1, P_2 den vierten harmonischen Punkt Q, so ist die Polare g zu P_0 der geometrische Ort dieser Punkte Q. Der Punkt P_0 heißt dann **Pol** zu dieser Geraden g.

2. Die Polare zu P_0 geht durch den Berührungspunkt der von P_0 aus an den Kegelschnitt gelegten Tangenten.

3. Die Polare zu einem Kegelschnittspunkt ist Tangente in diesem Punkt.

4. Bewegt sich der Punkt P_0 auf einer festen Geraden, so dreht sich die Polare zu P_0 um den Pol dieser Geraden.

5. Dreht sich eine Gerade g um einen festen Punkt, so bewegt sich der Pol dieser Geraden g auf der Polaren des festen Punktes.

6. Die Polare zum Mittelpunkt M ist die unendlich ferne Gerade.

7. Die Polare eines unendlich fernen Punktes ist ein Durchmesser.

8. Zwei Gerade heißen **konjugiert,** wenn jede von ihnen durch den Pol der andern geht.

9. Zwei Durchmesser heißen konjugiert, wenn jeder von ihnen durch den Pol des andern geht.

10. Die Berührungspunkte der zu einem Durchmesser parallelen Tangenten liegen auf dem konjugierten Durchmesser.

11. Die Mittelpunkte paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser, der zu den Sehnenrichtungen konjugiert ist.

12. Die **Direktrix** ist die Polare des Brennpunktes.

13. Die Polare zu $P_0 = x_0|y_0$ für den Kegelschnitt

$$S \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

hat als Gleichung

$$Q \equiv x(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}) = 0$$

oder

$$Q \equiv x_0(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + y_0(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}) = 0.$$

14. Die **Tangente** in einem Kegelschnittspunkt $P_0 = x_0|y_0$ ist gleichzeitig Polare dieses Punktes, hat also dieselbe Gleichung.

15. Das **Tangentenpaar** von einem Punkt $P_0 = x_0|y_0$ aus an den Kegelschnitt $S = 0$ hat die Gleichung

$$Q^2 - SR = 0,$$

wenn

$$S \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$
$$R \equiv a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33},$$
$$Q \equiv x(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}).$$

§ 73. Kreis.

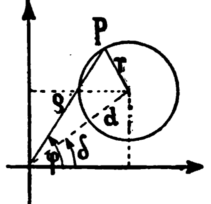


Fig. 10.

1. **Normalgleichung.** Der Kreis mit dem Radius r um den Mittelpunkt $M = a|b$ hat die Gleichung

$$K \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

Die geometrische Bedeutung von K siehe 12 und 13.

2. **Allgemeine Kreisgleichung.** Die allgemeine Kegelschnittsgleichung

$$S \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

definiert einen Kreis, wenn

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0,$$

ist also von der Form

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0.$$

3. In **schiefwinkligen Koordinaten** ist die Kreisgleichung
$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 + 2(x - a)(y - b)\cos\omega = 0.$

4. In **Polarkoordinaten** ist die Kreisgleichung

$$c^2 = r^2 + d^2 - 2rd\cos(\varphi - \delta) = 0.$$

c Radius, r Radiusvektor.

5. Als **Richtung einer Kurve** definiert man die Richtung ihrer Tangente, d. i. $\operatorname{tg}\varphi$, wenn φ deren Richtungswinkel.

6. **Richtung des Kreises** $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ in P_0.

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{x_0}{y_0}.$$

7. **Polare** des Punktes P_0 für $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

$$xx_0 + yy_0 - r^2 = 0.$$

8. **Pol** der Geraden $ax + by + c = 0$.

$$P_0 = -\frac{ar^2}{c} \,\Big|\, -\frac{br^2}{c}.$$

9. **Tangente** in einem Kreispunkt P_0.

$$xx_0 + yy_0 - r^2 = 0.$$

10. **Tangentenpaar** von P_0 aus an $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

$$y - y_0 = \frac{x_0 y_0 \pm r\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - r^2}}{x_0^2 - r^2}(x - x_0).$$

11. **Tangentenpaar** mit gegebener Richtung λ an $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

$$y = \lambda x \pm r\sqrt{\lambda^2 + 1}.$$

12. **Tangentenstück** $P_0P_1 = \sqrt{K_0}$, wenn P_1 der Berührpunkt der von P_0 aus an den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ gelegten Tangente ist.

$$P_0P_1 = \sqrt{K_0} = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2}.$$

13. **Potenz** des Punktes P_0 für den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

$$K_0 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2.$$

14. Liegt P_0 außerhalb des Kreises, so ist $K_0 > 0$ und $\sqrt{K_0}$ das Tangentenstück; liegt P_0 auf dem Kreis, so ist $K_0 = 0$; liegt P_0 innerhalb des Kreises, so ist $K_0 < 0$.

15. Zwei Kreise

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0$$

berühren sich bezw. **schneiden sich senkrecht**, wenn

$$(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$$
$$\text{bezw. } (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

$\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$ ist die **Zentrale** der beiden Kreise.

16. Alle Kreise durch die nämlichen zwei Punkte bilden ein **Kreisbüschel.** Das Kreisbüschel durch die Schnittpunkte von $K_1 = 0$ mit $K_2 = 0$ hat die Gleichung

$$K_1 - \lambda K_2 = 0,$$

in der Normalform

$$K_\lambda \equiv \frac{K_1 - \lambda K_2}{1 - \lambda} = 0.$$

Jedem Parameter λ entspricht ein bestimmter Kreis und umgekehrt. Jeder Punkt des Büschelkreises $K_1 - \lambda K_2 = 0$ hat gegenüber den beiden Grundkreisen $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ das konstante **Potenzverhältnis** $\lambda = K_1 : K_2$.

17. Das Kreisbüschel durch die beiden Punkte $P_1 = x_1|y_1$ und $P_2 = x_2|y_2$ ist

$$[(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2] - \lambda[x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)] = 0,$$

wenn $2a = x_1 + x_2$, $2b = y_1 + y_2$, $2r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

18. Das Kreisbüschel durch die Punkte $P_1 = d|0$ und $P_2 = -d|0$,

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y - d^2 = 0,$$

ist ein Orthogonalsystem zu dem Kreisbüschel durch die Punkte $P_3 = 0|id$ und $P_4 = 0|-id$,

$$x^2 + y^2 - 2\mu x + d^2 = 0,$$

d. h. jeder Kreis des einen Büschels schneidet jeden Kreis des andern Büschels senkrecht.

18. **Potenzlinie, Chordale** oder **Harmonikale** der Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ ist die Gerade durch die Schnittpunkte beider Kreise. Ihre Gleichung ist

$$K_1 - K_2 = 0.$$

Ihre Einzelpunkte haben gegenüber jedem Kreis des Büschels $K_1 - \lambda K_2 = 0$ gleiche Potenz.

Die Potenzlinie zweier Kreise steht senkrecht auf der Zentrale.

20. Die drei Potenzlinien von drei Kreisen schneiden sich in einem Punkt.

§ 74. Ellipse und Hyperbel.

1. **Mittelpunktsaxengleichung.** (Das obere Vorzeichen gilt der Ellipse, das untere der Hyperbel. Fig. 11 und 12.)

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

M ist der **Mittelpunkt**; die Schnittpunkte mit den Axen sind die **Scheitel**, a und b die **Halbaxen**.

Wenn a = b, so stellt

$$x^2 \pm y^2 - a^2 = 0$$

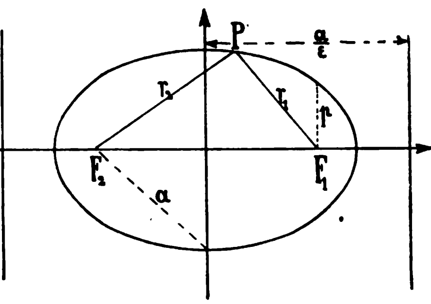


Fig. 11.

die **gleichseitige Ellipse** (Kreis), bezw. die **gleichseitige Hyperbel** dar.

F_1 und F_2 sind die **Brennpunkte**, $MF_1 = MF_2 = e$ ist die **Brennweite** oder **lineare Exzentrizität**, r_1 und r_2 sind die **Brennstrahlen**, $\varepsilon = e:a$ ist die **numerische Exzentrizität**, der **Halbparameter** p ist die Ordinate im Brennpunkt (auch der Krümmungsradius im Scheitel der a-Axe).

2. $e^2 = a^2 \mp b^2$; $p = \frac{b^2}{a}$;

$r_1 = \pm(a - \varepsilon x_0)$; $r_2 = a + \varepsilon x_0$,

wenn $P_0 = x_0 | y_0$ der untersuchte Kurvenpunkt.

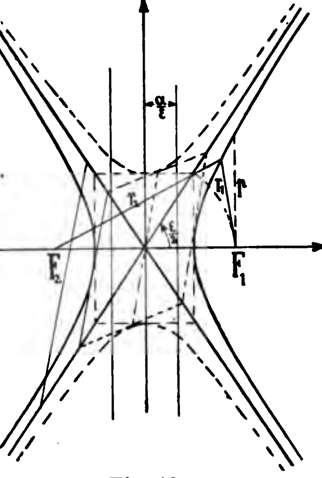


Fig. 12.

Ellipse $r_1 + r_2 = 2a$; Hyperbel $r_1 - r_2 = \pm 2a$.

3. Gleichung der **Direktrix**.

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{e}.$$

4. **Asymptoten** $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 0$, also

$\left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right) = 0$ Ellipse (imag. Asymptoten).

$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$ Hyperbel (reelle Asymptoten).

5. Die zur Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ **konjugierte Hyperbel** (in Fig. 12 gestrichelt) mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ hat die nämlichen Asymptoten.

6. **Polare** zu P_0.

$$\frac{xx_0}{a^2} \pm \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0.$$

7. **Pol** der Geraden $Ax + By + C = 0$.

$$x_0 = -\frac{a^2 A}{C}, \quad y_0 = \mp \frac{b^2 B}{C}.$$

8. **Richtung** der $\left.\begin{matrix}\text{Ellipse}\\ \text{Hyperbel}\end{matrix}\right\}$ in P_0.

$$\operatorname{tg}\varphi = \mp \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

9. **Tangente** in P_0.

$$\frac{xx_0}{a^2} \pm \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0.$$

10. **Normale** in P_0.

$$y - y_0 = \pm \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0).$$

11. **Tangentenpaar** von P_0 aus.

$$y - y_0 = \frac{x_0 y_0 \pm \sqrt{b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 - a^2 b^2}}{x_0^2 - a^2}(x - x_0) \quad \text{Ellipse.}$$

$$y - y_0 = \frac{x_0 y_0 \pm \sqrt{a^2 b^2 - b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2}}{x_0^2 - a^2}(x - x_0) \quad \text{Hyperbel.}$$

12. **Tangentenpaar** mit gegebener Richtung λ.

$$y = \lambda x \pm \sqrt{\lambda^2 a^2 + b^2} \quad \text{Ellipse.}$$

$$y = \lambda x \pm \sqrt{\lambda^2 a^2 - b^2} \quad \text{Hyperbel.}$$

13. **Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale** (siehe Kurvendiskussion) im Punkt P_0.

$$T = \frac{a y_0}{b x_0}\sqrt{\pm(a^2 - \varepsilon^2 x_0^2)}, \qquad N = \frac{b}{a}\sqrt{\pm(a^2 - \varepsilon^2 x_0^2)}.$$

$$S_t = \mp\frac{a^2}{x_0} \pm x_0, \qquad S_n = \mp\frac{b^2}{a^2} x_0.$$

14. **Krümmungsradius** ϱ im Punkt P_0.

$$\varrho = \frac{(r_1 r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{(b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2)^{3/2}}{a^4 b^4} = \frac{N^3}{p^2}.$$

(N siehe 13). Im Scheitel der a-Axe ist $\varrho = \frac{b^2}{a} = p$, im Scheitel der b-Axe ist $\varrho = \frac{a^2}{b}$. Der **Krümmungsmittelpunkt**

$$\xi | \eta = \frac{e^2 x_0^3}{a^4} \bigg| \frac{-e^2 y_0^3}{b^4}.$$

15. **Fläche.** Ellipsenzone zwischen der y-Axe und einer Parallelsehne $x = x_0$.

$$F = x_0 y_0 + ab \arcsin\frac{x_0}{a}.$$

Ellipsenfläche $= \pi ab$.

Hyperbelsegment zwischen Scheitel und Sehne $x = x_0$.

$$F = x_0 y_0 - ab \lg\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right).$$

16. **Bogen.** Ellipsenumfang $= \pi(a + b)R$, wenn

$$R = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \frac{1}{64}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \frac{1}{256}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 + \cdots.$$

17. **Parameterdarstellung der Ellipse.** $\left.\begin{array}{l} x = a \cos\varphi \\ y = b \sin\varphi \end{array}\right\}.$

Jedem Parameter φ entspricht ein bestimmter Ellipsenpunkt $P = a \cos\varphi | b \sin\varphi$ und ein bestimmter Durchmesser 2α der Ellipse. Dem Parameter φ ist **konjugiert** der Parameter $\varphi + 90^0$, dem der Punkt $P' = -a \sin\varphi | b \cos\varphi$ entspricht sowie der **konjugierte Durchmesser** 2β.

18. **Parameterdarstellung der Hyperbel.**

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{a}{\cos\varphi} \\ y = b \operatorname{tg}\varphi \end{array}\right\} \text{ statt } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

und

$$\left.\begin{array}{l} x = a \operatorname{tg}\varphi \\ y = \dfrac{b}{\cos\varphi} \end{array}\right\} \text{ statt } -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Jedem Parameter φ entspricht je ein Punkt auf den beiden Hyperbeln. Die durch die beiden Punkte bestimmten Durchmesser 2α und 2β sind **konjugiert.**

19. Sind ψ_1 und ψ_2 die Richtungswinkel der konjugierten Durchmesser, ϑ ihr Zwischenwinkel, so gilt für Ellipse und Hyperbel

$$\operatorname{tg}\psi_1 \cdot \operatorname{tg}\psi_2 = \mp \frac{b^2}{a^2};$$

$$\alpha^2 \pm \beta^2 = a^2 \pm b^2; \quad \alpha\beta \sin\vartheta = ab.$$

Der konjugierte Durchmesser zu

$$Ax + By = 0 \text{ ist } Bb^2x \mp Aa^2y = 0.$$

20. Alle der Ellipse bezw. Hyperbel umschriebenen Parallelogramme sind inhaltsgleich. Die Diagonalen sind konjugierte Durchmesser.

Die Seiten eines eingeschriebenen Parallelogramms sind zwei konjugierten Durchmessern parallel.

21. **Gleichung bezogen auf zwei konjugierte Durchmesser.**

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} \pm \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0.$$

22. **Asymptotengleichung der Hyperbel.**

$$4\xi\eta = a^2 + b^2 \quad \text{oder} \quad 2\xi\eta \sin\varepsilon = ab.$$

ε ist der Winkel zwischen den Asymptoten.
Gleichung von zwei konjugierten Durchmessern.

$$\left.\begin{matrix} \xi + \lambda\eta = 0 \\ \xi - \lambda\eta = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Tangente in P_0.

$$2(\xi\eta_0 + \eta\xi_0) = a^2 + b^2.$$

23. Alle Dreiecke, deren eine Seite die Hyperbel berührt, während die anderen auf den Asymptoten liegen, sind inhaltsgleich. Die tangierende Dreiecksseite wird im Berührpunkt halbiert.

24. Auf jeder Sekante werden durch die Hyperbel und ihre Asymptoten zwischen Hyperbel und Asymptote zwei gleiche Stücke abgeschnitten.

25. Alle Parallelogramme mit zwei Seiten auf den Asymptoten sind inhaltsgleich, wenn sie einen Eckpunkt auf der Hyperbel haben.

26. **Gleichseitige Hyperbel** bezogen auf die zu einander senkrechten Asymptoten als Axen.

$$xy = c.$$

27. **Polargleichung** für Ellipse und Hyperbel (siehe auch § 70). Der Mittelpunkt ist Anfangspunkt, die a-Axe Anfangsstrahl.

$$r^2 = \frac{\pm b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\varphi}.$$

28. **Konfokale Kegelschnitte** (= Mittelpunktskurven mit den nämlichen Brennpunkten); $a > b$ vorausgesetzt.

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1 = 0.$$

Wenn $\lambda < b^2$ Ellipsen; $b^2 < \lambda < a^2$ Hyperbeln; $\lambda > a^2$ imaginäre Kegelschnitte. Alle konfokalen Kegelschnitte bilden ein Orthogonalsystem.]

29. Zwei Ellipsen mit den Axen $2a$, $2b$ bezw. $2a'$, $2b'$ sind einander **ähnlich**, wenn $a : b = a' : b'$. Ebenso zwei Hyperbeln, welche dann gleiche Asymptotenwinkel haben.

30. Die Lote d_1 und d_2 von den Brennpunkten auf eine beliebige Tangente haben das Verhältnis $d_1 : d_2 = r_1 : r_2$.

Das Produkt dieser Lote ist $d_1 d_2 = b^2$. Ihre Fußpunkte N_1 und N_2 liegen auf einem Kreis mit dem Halbmesser a um M.

§ 75. **Parabel.**

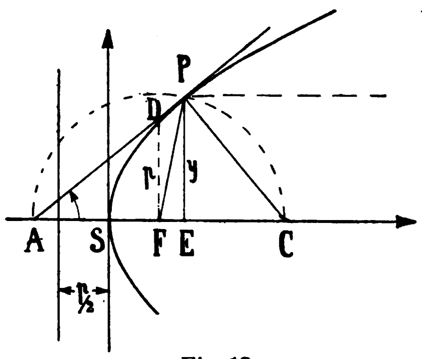


Fig. 13.

1. **Scheitelgleichung.**

$$y^2 = 2px.$$

p = **Halbparameter** = Ordinate im **Brennpunkt** F. Dieser hat vom Scheitel den Abstand $\frac{p}{2}$. Der **Brennstrahl** FP_0 ist

$$FP_0 = x_0 + \frac{p}{2} = \frac{p}{2\sin^2\alpha},$$

wenn α der Richtungswinkel der Tangente. Die **Direktrix** hat vom Scheitel den Abstand $^1/_2\, p$.

2. **Polare** zu P_0.

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Pol der Geraden $ax + by + c = 0$.

$$P_0 = \frac{c}{a} \,\Big|\, -\frac{bp}{a}.$$

Dem Durchmesser durch den Parabelpunkt P_0 ist die Tangentenrichtung **konjugiert.**

3. **Richtung** in P_0.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{y_0}.$$

4. **Tangente** in P_0.

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

5. **Normale** in P_0.

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0).$$

6. **Tangentenpaar** vom beliebigen Punkt P_0 aus.

$$y - y_0 = \frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 2p x_0}}{2x_0}(x - x_0).$$

Tangente mit gegebener Richtung λ.

$$y = \lambda x + \frac{p}{2\lambda}.$$

7. **Tangente, Normale, Subtangente, Subnormale** (siehe Kurvendiskussion) im Punkt P_0.

$$T = \sqrt{2x_0(2x_0 + p)}, \qquad N = \sqrt{p(2x_0 + p)}.$$
$$S_t = 2x_0, \qquad S_n = p.$$

8. **Krümmungsradius** ϱ im Punkt P_0.

$$\varrho = \frac{(y_0^2 + p^2)^{3/2}}{p^2} = \frac{(p + 2x_0)^{3/2}}{\sqrt{p}} = \frac{N^3}{p^2}.$$

(N siehe 7). Für den Scheitel ist $\varrho = p$.

Krümmungsmittelpunkt.

$$\xi | \eta = 3x_2 + p \,|\, -\frac{2x_0 y_0}{p}.$$

Evolute ist die Neilsche Parabel

$$27py^2 = 8(x - p)^3.$$

9. **Fläche.** Parabelsegment zwischen Scheitel und Sehne $x = x_0$.

$$F = {}^4/_3\, x_0 y_0.$$

Die Sekante durch die Parabelpunkte P_1 und P_2 schneidet ein Segment aus

$$S = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p}.$$

10. **Bogen** vom Scheitel bis P_0.

$$s = \frac{p}{2}\left[\sqrt{\frac{2x_0}{p}\left(1 + \frac{2x_0}{p}\right)} + \lg\left(\sqrt{\frac{2x_0}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x_0}{p}}\right)\right].$$

Ist $x_0 : y_0$ ein kleiner Bruch, so ist angenähert

$$s = y_0\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^4\right].$$

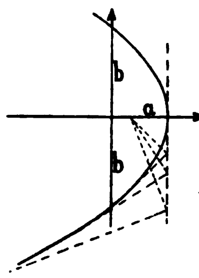


Fig. 14.

11. **Abschnittsgleichung der Parabel** (rechtwinklige oder schiefwinklige Koordinaten).

$$\frac{x}{a}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \text{ bezw. } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y}{b}-1=0,$$

wenn auf der x-Axe a, auf der y-Axe $\pm$ b abgeschnitten wird, bezw. auf der x-Axe $\pm$ a, auf der y-Axe b.

12. **Gleichung bezogen auf eine Tangente und die zu ihr konjugierte Richtung.** ($p' = 2PF_0$ siehe 1.)

$$\eta^2 = 2p'\xi.$$

13. Die Parabeltangente schneidet eine vom Brennpunkt aus zu ihr senkrecht gezogene Gerade auf der Scheiteltangente.

14. Je zwei senkrechte Parabeltangenten schneiden sich auf der Direktrix.

15. Alle Parabeln sind einander ähnlich.

§ 76. Konstruktion der Kegelschnitte.

I. Ellipse.

1. Konstruktion der Ellipse.

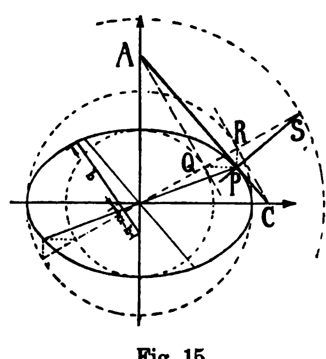


Fig. 15.

a) Wenn d und ε direkt oder indirekt gegeben, nach § 70. 5, 6.

b) Nach dem Satz von Paskal oder Brianchon § 70, wenn fünf Punkte bezw. fünf Tangenten gegeben sind.

c) Fadenkonstruktion, wenn direkt oder indirekt e und a gegeben, nach § 74.

d) Die Parametergleichung

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi$$

stellt die Ellipse als Projektion ihres ein- und umgeschriebenen

Kreises dar. Die Kreise um M mit den Radien b, a, a + b werden von einem beliebigen Fahrstrahl von M aus in Q, R und S geschnitten; RP vertikal; QP horizontal; SP ist Normale.

e) Papierstreifen-Konstruktion Fig. 15. Man läßt die Enden eines Streifens von der Länge a — b auf den Axen gleiten. Auf der Verlängerung desselben um b liegt der die Ellipse beschreibende Punkt.

f) Konstruktion aus zwei konjugierten Durchmessern 2α und 2β nach Fig. 16.

2. **Konstruktion von Richtung und Größe der Halbaxen** a und b aus zwei konjugierten Durchmessern 2α und 2β, Fig. 16. Vom Ellipsenpunkt A aus Senkrechte zu β; $AC = \beta$; $MO = OC$; Kreis um O durch A schneidet MC in D und E; AE und AD Richtung der Halbaxe a bezw. b, MD und ME Größe der Halbaxe a bezw. b.

Fig. 16.



3. Konstruktion von Tangente und Normale im Ellipsenpunkt P.

a) Nach dem Satz von Paskal oder Brianchon § 70.

b) Konstruktion nach § 70. 9.

c) Nach 1 d.



4. Konstruktion der Tangenten von P aus.

a) Mit Hilfe der Polaren § 72.

b) Der Kreis um P durch F_1 bezw. F_2 trifft den Kreis mit dem Radius 2a um F_2 bezw. F_1 im Punkt Q. Die Gerade F_2Q bezw. F_1Q schneidet den Berührpunkt auf der Ellipse aus.

II. Hyperbel.

5. Konstruktion der Hyperbel.

a) Wenn d und ε direkt oder indirekt gegeben, nach § 70.5,6.

b) Nach dem Satz von Paskal oder Brianchon § 70, wenn fünf Punkte bezw. fünf Tangenten der Hyperbel gegeben sind.

c) Fadenkonstruktion, wenn direkt oder indirekt e und a gegeben, nach § 74.

6. Konstruktion von Tangente und Normale im Hyperbelpunkt P.

a) Nach dem Satz von Brianchon oder Paskal § 70.

b) Konstruktion nach § 70. 9.

c) Nach § 74. 23 bezw. 25; die Tangente durch den Punkt $P = \xi | \eta$ schneidet auf den Asymptoten die Stücke 2ξ bezw. 2η ab, § 74. 22.

7. Konstruktion der Tangenten von P aus mit Hilfe der Polaren § 72.

III. Parabel.

8. Konstruktion der Parabel.

a) Wenn d und ε direkt oder indirekt gegeben, nach § 70.5, 6.

b) Nach dem Satz von Paskal oder Brianchon; die Parabel ist bereits durch vier Elemente bestimmt.

c) Aus Scheitel und Brennpunkt wie 1 c, wenn man die Parabel als Ellipse mit unendlich fernem Brennpunkt U betrachtet. Um soviel der horizontale Brennstrahl (Fig. 13) abnimmt, wenn der Parabelpunkt von S nach P wandert, um soviel nimmt der andere Brennstrahl FS zu, so daß

$$FP = \tfrac{1}{2} p + x_0 = FC = FA.$$

Wenn gegeben mit der Axe der Brennpunkt, sowie ein beliebiger Parabelpunkt P: Kreis um F mit Radius FP schneidet die Axe in A und C; PE senkrecht zur Axe; $EC = p$; $FS = \tfrac{1}{2} p$ liefert den Scheitel S; AP ist Tangente. Die umgekehrte Konstruktion liefert bei gegebenem S beliebig viele Parabelpunkte.

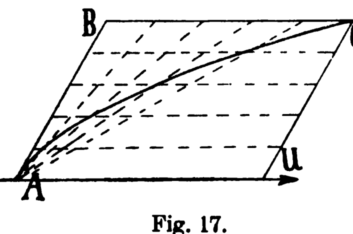


Fig. 17.

d) Wenn gegeben ein Parabelpunkt A mit Tangente und ein Durchmesser AU, sowie ein weiterer Parabelpunkt C [speziell, wenn gegeben Scheitel A, Axe AU, sowie Parabelpunkt C] nach Fig. 17.

e) Wenn gegeben die Axen-

richtung MN, sowie drei Parabelpunkte C, D, E [speziell, wenn gegeben eine zur Axe vertikale Sehne CD und ein weiterer Parabelpunkt E]. Die Abschnittsgleichung § 75 liefert die Konstruktion Fig. 18. CG = GD; GU und EF parallel MN; CE schneidet GU in H; Parallele zu CD durch H schneidet EF in J; Gerade DJ liefert den Durchmesserpunkt A.

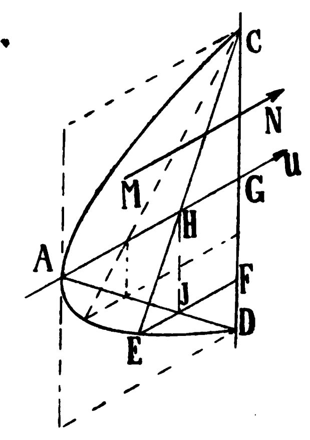


Fig. 18.

Hat man so A gefunden oder war A bereits gegeben, so konstruiert man Punkte E′ umgekehrt: Gerade CH′; H′J′ parallel CD schneidet AD in J′; F′J′ parallel AG und CH′ schneiden sich im Parabelpunkt E′.

f) Kennt man zwei Tangenten AB und AC nebst ihren Berührpunkten B und C, so liefert Fig. 19 das Schema der Konstruktion.

g) Wenn Scheitel S und Brennpunkt F gegeben, so liefert § 75. 13 die in Fig. 14 angedeutete Konstruktion.

Fig. 19.

9. Konstruktion von Tangente und Normale im Parabelpunkt P.

a) Nach dem Satz von Paskal oder Brianchon § 70.

b) Konstruktion nach § 70. 9.

c) Nach 8c; man macht SA = SE; AP ist Tangente; man macht EC = p; CP ist Normale. Fig. 13.

10. Konstruktion der Tangenten von P aus.

a) Mit Hilfe der Polaren § 72.

b) Entsprechend 4b; der Kreis von P durch F schneidet die Direktrix in zwei Punkten M und N; Parallele durch M und N zur Axe schneiden auf der Parabel die Berührpunkte aus.

B. Synthetische Behandlung.

§ 77. Verallgemeinerung des Koordinatenbegriffes.

(Siehe hierzu § 5.)

1. Ein Punkt auf einer Geraden ist durch Angabe einer Zahl vollständig festgelegt, z. B. durch die Angabe der Entfernung von einem festen Anfangspunkt, wobei der Entfernung durch + oder — noch ein bestimmter Bewegungssinn beigelegt werden kann. Man sagt, der Punkt auf der Geraden hat einen **Freiheitsgrad** und nennt die Zahl, welche die Lage des Punktes bestimmt, seine Koordinate auf der Geraden, oder auch seinen Parameter. Dabei ist es gleichgültig, wie die Gerade im Raum liegt. Man kann dem Punkt auf der Geraden auch zwei, drei etc. Koordinaten geben, dann müssen aber zwischen den Koordinaten noch eine, zwei etc. Beziehungen stattfinden. Definiert man z. B. als Koordinaten x_1 und x_2 des laufenden Punktes der Geraden die zwei Entfernungen desselben von zwei festen Punkten P_1 und P_2 der Geraden mit der Entfernung d, so besteht zwischen x_1 und x_2 die Beziehung $x_1 \pm x_2 = d$.

Wählt man als Koordinaten x, y, z die Abstände von drei festen zu einander senkrechten Ebenen (wenn man die Punkte der Geraden mit anderen Punkten außerhalb der Geraden in Beziehung setzen will), so müssen zwei Beziehungen zwischen diesen drei Koordinaten x, y, z statthaben, wenn durch diese die Geradenpunkte dargestellt werden sollen.

2. Was von der Geraden gilt, gilt selbstverständlich auch von einer beliebigen Kurve. Die Aussage, „ein Punkt auf einer Kurve hat einen Freiheitsgrad" ist äquivalent mit folgenden Ausdrucksweisen: Durch Angabe einer Zahl ist seine Lage fixiert, oder: um die Bewegung des Punktes anzugeben, hat man eine Gleichung notwendig; oder: um den Punkt auf der Kurve festzulegen, muß man ihm eine Führung (Auflagerung, Auflagerbahn) geben nach der Sprechweise der Mechanik.

3. Ein geometrisches Gebilde hat **n Freiheitsgerade** oder **n Koordinaten** heißt: Man muß n Zahlen angeben, um die augenblickliche Lage des Gebildes zu fixieren; oder: um die

Bewegung des Gebildes anzugeben, hat man n Gleichungen aufzustellen (indem man etwa die n Koordinaten von der Zeit t abhängig macht); oder: um das Gebilde festzuhalten, muß man ihm n Auflagerbedingungen vorschreiben.

4. Ein **Punkt** einer Kurve (speziell der Geraden) hat einen Freiheitsgrad. Ein Punkt auf einer Fläche (speziell Ebene) hat zwei Freiheitsgrade. Ein Punkt im Raum hat drei Freiheitsgrade.

5. Eine **Gerade** durch einen festen Punkt der Ebene hat in dieser Ebene einen Freiheitsgrad. Eine Gerade durch einen festen Punkt im Raum hat zwei Freiheitsgrade. Eine Gerade der Ebene hat zwei Freiheitsgrade. Eine Gerade im Raum hat vier Freiheitsgrade.

6. Eine **Ebene** durch eine feste Gerade hat einen Freiheitsgrad. Eine Ebene durch einen festen Punkt hat zwei Freiheitsgrade. Eine Ebene im Raum hat drei Freiheitsgrade.

7. **Dualität.** Jeder geometrischen Tatsache steht, solange der gewöhnliche Maßbegriff fehlt, eine zweite geometrische Tatsache — die **duale** — gegenüber; jedem Satz also ein **dualer Satz,** jeder Formel eine **duale Formel** etc. Man hat nur in dem ersten Satz das Element „Punkt“ durch „Gerade“ zu vertauschen und umgekehrt, das Element „Ebene“ aber unvertauscht zu lasssen, so lange man in der Ebene operiert: Geometrie der Ebene.

(Oder man vertauscht das Element „Gerade“ durch „Ebene“ und umgekehrt, läßt aber das Element „Punkt“ unvertauscht, solange man im Punkt operiert: Geometrie im Punkt etc.)

8. **Duale Sätze der Ebene.**

Durch zwei Punkte ist eine Gerade bestimmt.	Durch zwei Gerade ist ein Punkt bestimmt.
Durch eine Gerade sind unendlich viele Punkte definiert: die **Punktreihe.** Die Gerade ist der **Träger** dieser Punktreihe.	Durch einen Punkt sind unendlich viele Gerade (=Strahlen) definiert: das Geraden- oder **Strahlenbüschel.** Der Punkt ist der **Träger** dieses Strahlenbüschels.

Durch drei Punkte ist ein Dreieck definiert.	Durch drei Gerade ist ein Dreiseit definiert.
Durch vier Punkte ist ein Viereck definiert. Das vollständige Viereck hat sechs Seiten.	Durch vier Gerade ist ein Vierseit definiert. Das vollständige Vierseit hat sechs Ecken. etc.

§ 78. **Linienkoordinaten.**

1. Eine Gerade der Ebene hat zwei Freiheitsgrade, d. h. durch Angabe zweier Zahlen ist ihre jeweilige Lage bestimmt; oder: man braucht zwei Gleichungen, um die Bewegung der Geraden in der Ebene anzugeben; oder: um sie in der Ebene festzuhalten, muß man ihr zwei Führungen geben, indem man ihr z. B. vorschreibt, sie soll zwei gegebene Kurven berühren, durch zwei gegebene Punkte gehen etc. Gibt man ihr nur eine Führung, indem man z. B. vorschreibt, sie soll eine gegebene Kurve berühren, so behält sie noch einen Freiheitsgrad, ist also dann durch Angabe einer Zahl bestimmt, durch ihre Koordinate auf der gegebenen Kurve.

2. Als ebene Koordinaten der Geraden allgemein bezeichnet man diejenigen zwei Zahlen (oder n Zahlen, falls zwischen ihnen noch n—2 Beziehungen bestehen), durch deren Angabe die Lage der Geraden gegenüber zwei festen Elementen der Ebene, dem Koordinatensystem, fixiert wird.

3. Speziell bezeichnet man als ebene **Linienkoordinaten** der Geraden die negativen Reziproken der Abstände m und n der Geraden auf den beiden Axen eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Ist also die Gleichung der Geraden

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} - 1 = 0,$$

so sind $-\frac{1}{m}$ und $-\frac{1}{n}$ die Linienkoordinaten dieser Geraden.

4. Die Gerade $ux + vy + 1 = 0$ hat die Linienkoordinaten u und v. $G = u|v$ bedeutet, die Gerade G hat die

Linienkoordinaten u und v. Umgekehrt hat die Gerade $G = u|v$ bezw. $G = 2|3$ die Gleichung

$$ux + vy + 1 = 0 \quad \text{bezw.} \quad 2x + 3y + 1 = 0.$$

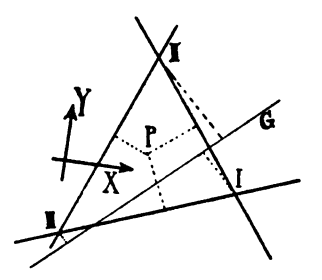
5. Jede ebene Kurve kann man sich entstanden denken aus unendlich vielen kontinuierlich aufeinanderfolgenden Punkten oder aus unendlich vielen kontinuierlich aufeinanderfolgenden Geraden, die dann die Kurve umhüllen. Gleichung der Kurve in Punkt- bezw. Linienkoordinaten ist dann der analytische Ausdruck der Eigenschaften der Koordinaten des laufenden Punktes bezw. der laufenden Geraden.

6. **Gleichung des Punktes** $P = x|y$ bezw. $P = 2|3$ in Linienkoordinaten.

$$ux + vy + 1 = 0 \quad \text{bezw.} \quad 2u + 3v + 1 = 0.$$

§ 79. Trimetrische Punkt- und Linienkoordinaten.

1. Die drei Geraden $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, $N_3 = 0$, (wenn $N_i \equiv x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - p_i$) bezogen auf das X-Y-Koordinatensystem, bestimmen ein Dreieck mit den Seiten l_1, l_2, l_3. Der untersuchte Punkt $P = x|y$ hat von diesen drei Geraden die Abstände N_1, N_2, N_3 (§ 69). Zwischen den N_i und l_i besteht die Relation (wenn Δ der Dreiecksinhalt)



$$N_1 l_1 + N_2 l_2 + N_3 l_3 = 2\Delta .$$

Fig. 20.

Die untersuchte Gerade $G = u|v$ hat von den drei Eckpunkten die Abstände R_1, R_2, R_3, zwischen denen eine lineare Beziehung

$$m_1 R_1 + m_2 R_2 + m_3 R_3 = C$$

besteht.

1. Jede Gerade der Ebene

$$ax + by + c = 0$$

läßt sich durch die Form

$$n_1 N_1 + n_2 N_2 + n_3 N_3 = 0$$

darstellen.

Jeder Punkt der Ebene

$$u\alpha + v\beta + \gamma = 0$$

läßt sich durch die Form

$$r_1 R_1 + r_2 R_2 + r_3 R_3 = 0$$

darstellen.

3. Die **trimetrischen Koordinaten** des Punktes P bezw. der Geraden G für das Koordinatendreieck I II III sind definiert durch

$$x_1 : x_2 : x_3 = \varrho_1 N_1 : \varrho_2 N_2 : \varrho_3 N_3 , \quad | \quad u_1 : u_2 : u_3 = \sigma_1 R_1 : \sigma_2 R_2 : \sigma_3 R_3 ,$$

aufgelöst

$$\mu x_1 = \varrho_1 N_1 , \quad \mu x_2 = \varrho_2 N_2 , \quad \mu x_3 = \varrho_3 N_3 , \quad | \quad \nu u_1 = \sigma_1 R_1 , \quad \nu u_2 = \sigma_2 R_2 , \quad \nu u_3 = \sigma_3 R_3 ,$$

d. h. als beliebig gewählte, aber feste Vielfache ihrer Abstände von den Seiten bezw. Ecken des Koordinatendreiecks **(trimetrische Punkt- und Linienkoordinaten).**

4. Im neuen System haben die

Dreiecksseiten die Gleichungen

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

und die Koordinaten

$$1|0|0, \quad 0|1|0, \quad 0|0|1,$$

wenn $P = a_1|a_2|a_3$ bedeutet

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_1 : a_2 : a_3 .$$

Dreiecksecken die Gleichungen

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0$$

und die Koordinaten

$$1|0|0, \quad 0|1|0, \quad 0|0|1,$$

wenn $G = \alpha_1|\alpha_2|\alpha_3$ bedeutet

$$u_1 : u_2 : u_3 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 .$$

5. Das Symbol a_x bezw. u_α bedeutet

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \quad \text{bezw.} \quad u_\alpha \equiv u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3 .$$

6. Läßt man in der Gleichung

$$u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

die u_i fest, die x_i aber variabel, so stellt die Gleichung $u_x = 0$ alle möglichen Punkte $x_1|x_2|x_3$ vor, die auf der Geraden u liegen, d. h. sie stellt diese Gerade u selber vor.

die x_i fest, die u_i aber variabel, so stellt die Gleichung $u_x = 0$ alle möglichen Geraden $u_1|u_2|u_3$ vor, die durch den Punkt **x** gehen, d. h. sie stellt diesen Punkt x selber vor.

7. Die Gerade

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

hat die trimetrischen Linienkoordinaten $a_1|a_2|a_3$, und umgekehrt ist die Gleichung der Geraden $a_1|a_2|a_3$

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Der Punkt

$$u_\alpha \equiv u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3 = 0$$

hat die trimetrischen Punktkoordinaten $\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3$, und umgekehrt ist die Gleichung des Punktes $\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3$

$$u_\alpha \equiv u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3 = 0.$$

8. $u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ ist die **Bedingung des Ineinanderliegens** des Punktes $x = x_1|x_2|x_3$ und der Geraden $u = u_1|u_2|u_3$, d. h. die Bedingung dafür, daß der Punkt x mit den Koordinaten $x_1|x_2|x_3$ auf der Geraden u mit den Koordinaten $u_1|u_2|u_3$ liegt, oder umgekehrt, daß die Gerade u durch den Punkt x hindurchgeht.

§ 80. Punktreihe und Strahlenbüschel.

1. Es bedeute die Schreib- und Sprechweise „Punkt y" bezw. „Gerade v" soviel wie: Punkt y hat die trimetrischen Punktkoordinaten $y_1|y_2|y_3$, bezw. Gerade v hat die trimetrischen Linienkoordinaten $v_1|v_2|v_3$.

2. Es bedeute

$$(ab)_i = a_j b_k - a_k b_j,$$

wenn i, j, k einen Zyklus bilden, also

$$(ab)_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad (ab)_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad (ab)_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

3. Es bedeute $\xi = \overline{uv}$ soviel wie $\xi_i = (uv)_i$, also

$$\xi_1 = (uv)_1, \quad \xi_2 = (uv)_2, \quad \xi_3 = (uv)_3.$$

4. Es bedeute $(abc) = a_1(bc)_1 + a_2(bc)_2 + a_3(bc)_3$, so daß

$$(abc) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5. Die Punkte a und b haben die Koordinaten $a_1|a_2|a_3$ bezw. $b_1|b_2|b_3$; ihre Gleichungen sind also bezw.

$$u_a \equiv u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 = 0,$$
$$u_b \equiv u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3 = 0.$$

Die Gerade durch sie ist

$$\gamma = \overline{ab},$$

hat also die Gleichung

$$\gamma_x \equiv (ab\,x) = 0.$$

Die Geraden a und b haben die Koordinaten $a_1|a_2|a_3$ bezw. $b_1|b_2|b_3$; ihre Gleichungen sind also bezw.

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$b_x \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0.$$

Ihr Schnittpunkt ist

$$\gamma = \overline{ab},$$

hat also die Gleichung

$$u_\gamma = (ab\,u) = 0.$$

Irgend ein Punkt c der durch die Punkte a und b definierten Punktreihe hat die Gleichung

$$u_a + \lambda u_b = 0$$

und die Koordinaten

$$a_1 + \lambda b_1 | a_2 + \lambda b_2 | a_3 + \lambda b_3 .$$

Irgend ein Strahl des durch die Strahlen a und b definierten Strahlenbüschels hat die Gleichung

$$a_x + \lambda b_x = 0$$

und die Koordinaten

$$a_1 + \lambda b_1 | a_2 + \lambda b_2 | a_3 + \lambda b_3 .$$

6. λ ist bis auf einen für alle Teilungspunkte bezw. Strahlen c konstanten Faktor das Teilungsverhältnis von c gegenüber den fixen Punkten bezw. Strahlen a und b (§ 65 bezw. 69).

§ 81. **Doppelverhältnis. Projektive Gebilde.**

1. Durch λ_1 und λ_2 sind

auf der Punktreihe

$$u_a + \lambda u_b = 0$$

zwei neue Punkte c und d

in dem Strahlenbüschel

$$a_x + \lambda b_x = 0$$

zwei neue Strahlen c und d

gegeben mit den Teilverhältnissen $\varrho\lambda_1$ und $\varrho\lambda_2$.

Das **Doppelverhältnis** der vier

Punkte | Strahlen

a, b, c, d in dieser Reihenfolge ist bezeichnet mit (a b c d) und definiert durch $\lambda_1 : \lambda_2$.

2. Irgend vier Punkte

$$u_a + \lambda_1 u_b = 0, \quad u_a + \lambda_2 u_b = 0,$$
$$u_a + \lambda_3 u_b = 0, \quad u_a + \lambda_4 u_b = 0$$

Irgend vier Strahlen

$$a_x + \lambda_1 b_x = 0, \quad a_x + \lambda_2 b_x = 0,$$
$$a_x + \lambda_3 b_x = 0, \quad a_x + \lambda_4 b_x = 0$$

haben in dieser Reihenfolge das Doppelverhältnis

$$D = \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)} .$$

3. Ist das Doppelverhältnis D der vier Strahlen bezw. Punkte gleich — 1, so sind dieselben **harmonisch** gelegen und umgekehrt.

4. Die vier Punkte a, b, c, d einer Punktreihe werden von einem beliebigen Punkt aus durch vier Strahlen projiziert, welche das gleiche Doppelverhältnis wie die vier Punkte haben.

Die vier Strahlen a, b, c, d eines Büschels werden von einer beliebigen Geraden in vier Punkten geschnitten, welche das gleiche Doppelverhältnis wie die vier Strahlen haben.

5. Die zwei Punktreihen $u_a + \lambda u_b = 0,\ u_a' + \lambda u_b' = 0$ | Die zwei Strahlenbüschel $a_x + \lambda b_x = 0,\ a'_x + \lambda b'_x = 0$ sind projektivisch auf einander bezogen (sie sind **projektiv**), d. h. je vier Elemente des einen Gebildes haben das gleiche Doppelverhältnis wie die entsprechenden vier Elemente des andern Gebildes.

6. Eine Punktreihe ist projektiv zu einem Strahlenbüschel, wenn irgend vier Punkte der Punktreihe das nämliche Doppelverhältnis haben wie die entsprechenden vier Strahlen des Strahlenbüschels.

7. Die Projektivität zweier Grundgebilde ist durch drei Paare einander zugeordneter Elemente bestimmt. Jedem vierten Element des einen Grundgebildes ist dann ein viertes Element des zweiten eindeutig zugeordnet.

§ 82. Koordinatentransformation und Kollineation.

1. **Übergang von einem Dreieck zum andern.** Seien P_1, P_2, P_3 die Ecken des alten Koordinatendreiecks und G_1, G_2, G_3 seine Seiten; Q_1, Q_2, Q_3 die Ecken des neuen und H_1, H_2, H_3 seine Seiten; P der variable Punkt und G die variable Gerade. Bezogen auf das alte Dreieck haben P und G die Koordinaten $x_1|x_2|x_3$ bezw. $u_1|u_2|u_3$; bezogen auf das neue $y_1|y_2|y_3$ bezw. $v_1|v_2|v_3$. Auf das alte Dreieck bezogen sind die Koordinaten von

$$P_1 = 1|0|0,\qquad P_2 = 0|1|0,\qquad P_3 = 0|0|1;$$
$$G_1 = 1|0|0,\qquad G_2 = 0|1|0,\qquad G_3 = 0|0|1;$$
$$Q_1 = a_{11}|a_{21}|a_{31},\quad Q_2 = a_{12}|a_{22}|a_{32},\quad Q_3 = a_{13}|a_{23}|a_{33}.$$

Dann sind auf das gleiche System bezogen die Koordinaten von

$$H_1 = A_{11}|A_{21}|A_{31},\quad H_2 = A_{12}|A_{22}|A_{32},\quad H_3 = A_{13}|A_{23}|A_{33}.$$

Dabei sind A_{ik} die Unterdeterminanten der nicht verschwindend vorausgesetzten Substitutionsdeterminante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Auf das neue Dreieck bezogen sind dann die Koordinaten von

$$P_1 = A_{11}|A_{12}|A_{13}, \quad P_2 = A_{21}|A_{22}|A_{23}, \quad P_3 = A_{31}|A_{32}|A_{33};$$
$$G_1 = a_{11}|a_{12}|a_{13}, \quad G_2 = a_{21}|a_{22}|a_{23}, \quad G_3 = a_{31}|a_{32}|a_{33};$$
$$Q_1 = 1|0|0, \quad Q_2 = 0|1|0, \quad Q_3 = 0|0|1;$$
$$H_1 = 1|0|0, \quad H_2 = 0|1|0, \quad H_3 = 0|0|1.$$

2. Die Transformationsgleichungen beim Übergang vom alten zum neuen System sind dann

$$\varrho x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \qquad \sigma u_1 = A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + A_{13}v_3,$$
$$\varrho x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \qquad \sigma u_2 = A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + A_{23}v_3,$$
$$\varrho x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3. \qquad \sigma u_3 = A_{31}v_1 + A_{32}v_2 + A_{33}v_3.$$

3. Und beim Übergang vom neuen zum alten System

$$\lambda y_1 = A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + A_{31}x_3, \qquad \mu v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3,$$
$$\lambda y_2 = A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + A_{32}x_3, \qquad \mu v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3,$$
$$\lambda y_3 = A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3. \qquad \mu v_3 = a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3.$$

4. **Übergang von kartesischen Koordinaten und umgekehrt.** Seien mit P_1, P_2, P_3 die Ecken des Koordinatendreiecks, mit G_1, G_2, G_3 seine Seiten bezeichnet, mit H_1, H_2, H_3 die y-Axe, x-Axe und die unendlich ferne Gerade, mit Q_1, Q_2, Q_3 die diesen Geraden gegenüberliegenden Punkte, also mit Q_1 der unendlich ferne Punkt auf der x-Axe, mit Q_2 der auf der y-Axe und mit Q_3 der Ursprung. Der variable Punkt P und die variable Gerade G haben auf das Dreieck bezogen die Koordinaten $x_1|x_2|x_3$ bezw. $u_1|u_2|u_3$, auf das kartesische Koordinatensystem bezogen die Koordinaten $x|y$ bezw. $u|v$. Auf das letzte System bezogen seien die Gleichungen der Dreiecksseiten

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0.$$

Dann sind die Gleichungen der Ecken, wenn A_i, B_i, C_i die Unterdeterminanten der nicht verschwindend gedachten Substitutionsdeterminante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

sind:

$$A_1u + B_1v + C_1 = 0,$$
$$A_2u + B_2v + C_2 = 0,$$
$$A_3u + B_3v + C_3 = 0.$$

5. Die Transformationsgleichungen beim Übergang von den Dreiecks- zu den kartesischen Kordinaten sind dann

$$\varrho x_1 = a_1x + b_1y + c_1, \qquad \sigma u_1 = A_1u + B_1v + C_1,$$
$$\varrho x_2 = a_2x + b_2y + c_2, \qquad \sigma u_2 = A_2u + B_2v + C_2,$$
$$\varrho x_3 = a_3x + b_3y + c_3. \qquad \sigma u_3 = A_3u + B_3v + C_3.$$

6. Und beim umgekehrten Übergang

$$\lambda x = A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3, \qquad \mu u = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3,$$
$$\lambda y = B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3, \qquad \mu v = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3,$$
$$\text{mit } \lambda = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3. \qquad \text{mit } \mu = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3.$$

7. Die Transformationsformeln 2, 3, 5, 6 gestatten noch eine andere Interpretation, wenn man x und y bezw. u und v auf ein Koordinatensystem bezieht. Dann wird jedem Punkt $x = x_1|x_2|x_3$ ein anderer Punkt $y = y_1|y_2|y_3$ eindeutig zugeordnet, jeder Geraden $u = u_1|u_2|u_3$ eindeutig eine andere Gerade $v = v_1|v_2|v_3$, jedem geometrischen Gebilde ein anderes eindeutig. Die durch die lineare Substitution 2 bezw. 3 dargestellte Abhängigkeit zwischen dem System der Punkte x und dem der y heißt **Projektivität, Kollineation** oder **Homographie.** Jedem Element des einen Systems entspricht eindeutig ein **homologes** oder **kollineares** Element des andern Systems, jedem Gebilde des einen Systems ein homologes oder kollineares Gebilde des andern.

8. Jede Kollineation zwischen zwei Systemen läßt sich durch eine lineare Substitution darstellen.

9. Sind zwei Systeme zum nämlichen dritten kollinear, so sind sie auch unter sich kollinear.

VII. Elemente der Diskussion ebener Kurven.

§ 83. Allgemeine Sätze.

1. **Transzendente Kurven** sind dargestellt durch transzendente Gleichungen, **algebraische Kurven** durch algebraische Gleichungen.

2. **Algebraische Kurven.** Um sie diskutieren zu können, müssen sie (im allgemeinen) rational und ganz gemacht werden.

3. Definition. Eine **Kurve n^{ter} Ordnung** wird von jeder Geraden in n reellen oder imaginären Punkten geschnitten. **Kegelschnitte** sind Kurven zweiter Ordnung.

4. Definition. Eine Kurve ist von der **n^{ten} Klasse,** wenn es von jedem Punkt aus an sie n reelle oder imaginäre Tangenten gibt. Kegelschnitte sind Kurven zweiter Klasse.

5. Eine **Kurvengleichung n^{ten} Grades** hat als höchste Dimension der Variabeln n.

6. Eine Gleichung n^{ten} Grades in x und y stellt eine Kurve n^{ter} Ordnung dar.

7. Eine Kurve m^{ter} und eine n^{ter} Ordnung schneiden sich in mn Punkten.

8. Ist die Kurvengleichung $F(x, y) = 0$ **homogen** (d. h. jeder Summand hat bezüglich der Variablen gleiche Dimension), so stellt sie eine endliche Anzahl von Geraden durch den Ursprung dar.

9. **Fehlt** in einer Gleichung **y** bezw. **x**, so stellt sie eine endliche Anzahl von Parallelen zur y- bezw. x-Axe vor.

10. **Fehlt** in der rationalen und ganzen Gleichung das **absolute Glied,** so geht die Kurve durch den Ursprung.

11. Eine **symmetrische** Gleichung (d. h. x und y sind vertauschbar, ohne daß sich die Gleichung ändert) stellt eine zur Mediane (Radiusvektor unter 45^0) symmetrische Kurve dar.

12. Ist das Vorzeichen von x bezw. y belanglos, d. h. $F(x, y)$ ist eine in x bezw. y **gerade Funktion,** so stellt die Gleichung eine zur y- bezw. x-Axe symmetrische Kurve vor.

13. Befriedigt mit $a|b$ auch $-a|-b$ die Kurvengleichung, so ist der Ursprung **Mittelpunkt** der Kurve.

14. **Reelle und imaginäre Gebiete** der Kurve lassen sich oft aus der Kurvengleichung ablesen. Z. B. kann $y = x^2 + x^4$ nur oberhalb der x-Axe verlaufen, da y für reelle Punkte nie negativ wird.

15. Das **Verhalten der Kurve in der Nähe des Nullpunktes** läßt sich oft aus der Kurvengleichung ablesen. Z. B. $y = x^2 + x^4$ verhält sich dort wie $y = x^2$.

16. Das **Verhalten der Kurve im Unendlichen** läßt sich oft aus der Kurvengleichung ablesen. Z. B. $y = x^2 + x^4$ verhält sich für große x wie $y = x^4$ (siehe auch Asymptoten).

17. Die Gleichung $F + \lambda G = 0$ (F und G Funktionen von x und y) stellt für ein bestimmtes λ eine Kurve durch die Schnittpunkte von $F = 0$ und $G = 0$ vor; für variables λ (Parameter) aber ein **Kurvenbüschel** durch die Schnittpunkte von $F = 0$ mit $G = 0$.

18. Die Gleichung $F + \lambda G^2 = 0$ stellt eine Kurve vor durch die Schnittpunkte von $F = 0$ mit $G = 0$. In den Schnittpunkten wird die Kurve $F + \lambda G^2 = 0$ von der Kurve $F = 0$ berührt.

19. Die Kurve $F \cdot G = 0$ setzt sich aus den Teilkurven $F = 0$ und $G = 0$ zusammen.

§ 84. Kurvenkonstruktion.

1. Die Konstruktion und auch Diskussion einer Kurve erfolgt teils nach den Sätzen des vorausgehenden und der nachfolgenden Paragraphen, teils nach dem Satz: Die Kurve $\mathbf{F(u, v) = 0}$, wo $u = u(x)$, $v = v(y)$ ist, geht durch eine

mit u und v bestimmte Transformation aus der Kurve $F(x, y) = 0$ hervor.

2. Die Kurve $\mathbf{F(x + c, y) = 0}$ geht aus der Kurve $F(x, y) = 0$ hervor, indem man sie in der x-Richtung um $-c$ verschiebt. Hier ist $u = x + c$, $v = y$.

Um z. B. $y = \sin(x + 2)$ zu konstruieren, zeichnet man die Sinuskurve $y = \sin x$ und verschiebt sie in Richtung der x-Axe um -2.

3. Die Kurve $\mathbf{F(x, y + c) = 0}$ geht aus der Kurve $F(x, y) = 0$ hervor, indem man sie in Richtung der y-Axe um $-c$ verschiebt. Hier ist $u = x$, $v = y + c$.

Um z. B. $y = \sin x + 2$ oder $y - 2 = \sin x$ zu finden, zeichnet man die Kurve $y = \sin x$ und verschiebt sie in der y-Richtung um $+2$.

4. Die Kurve $\mathbf{F(x + a, y + b) = 0}$ geht aus der Kurve $F(x, y) = 0$ hervor, indem man sie in der x-Richtung um $-a$, in der y-Richtung um $-b$ verschiebt. (Oder man verschiebt das Koordinatensystem um a bezw. b in Richtung beider Axen.)

5. Die Kurve $\mathbf{F(cx, y) = 0}$ geht aus der Kurve $F(x, y) = 0$ hervor, indem man sie in der x-Richtung $\frac{1}{c}$ mal homogen deformiert, d. h. c mal verkürzt. Hier ist $u = cx$, $v = y$.

Um z. B. $y = \sin 2x$ zu finden, zeichnet man die Kurve $y = \sin x$ und halbiert jede Abszisse.

6. Die Kurve $\mathbf{F(x, cy) = 0}$ geht aus der Kurve $F(x, y) = 0$ hervor, indem man sie in der y-Richtung $\frac{1}{c}$ mal homogen deformiert, d. h. c mal verkürzt. Hier ist $u = x$, $v = cy$.

Um z. B. $y = 2 \sin x$ oder $\frac{y}{2} = \sin x$ zu erhalten, zeichnet man die Kurve $y = \sin x$ und verdoppelt jede Ordinate.

7. Die Kurve $\mathbf{F(ax, by) = 0}$ geht aus der Kurve $F(x, y) = 0$ hervor, indem man sie in der x- bezw. y-Richtung $\frac{1}{a}$ mal bezw. $\frac{1}{b}$ mal homogen deformiert.

8. Die Funktion $\mathbf{F(x^2, y) = 0}$ geht aus der Kurve $F(x, y) = 0$ hervor, indem man die Abszisse der neuen Kurve gleich der zweiten Wurzel der alten macht.

9. Entsprechend findet man $\mathbf{F(x, y^2) = 0}$, $\mathbf{F(x, \sqrt{y}) = 0}$ etc. Um z. B. die Kurve $y^2 = \sin x$ zu erhalten, oder $y = \sin^2 x$, d. h. $\sqrt{y} = \sin x$, zeichnet man die Kurve $y = \sin x$ und nimmt im ersten Fall von jeder Ordinate die zweite Wurzel, im zweiten Fall das Quadrat, während die Abszissen der alten Kurve auch die der neuen sind.

10. Die Kurve $\mathbf{F(y, x) = 0}$ geht aus der Kurve $\mathbf{F(x, y) = 0}$ durch Vertauschung der x- und y-Axe hervor; beide Kurven liegen gegenseitig symmetrisch in Bezug auf die Mediane $y = x$, z. B. $y = \sin x$ und $y = \arcsin x$.

11. Die Ordinate der Kurve $\mathbf{y = u(x) + v(x)}$ ist die Summe der Ordinaten der Kurven $y = u(x)$ und $y = v(x)$ an der Stelle $\mathbf{x}$.

12. Die Ordinate der Kurve $\mathbf{y = u(x) \cdot v(x)}$ ist das Produkt der Ordinaten der Kurven $y = u(x)$ und $y = v(x)$.

13. Die Kurve $\mathbf{x = u(t)}$, $\mathbf{y = v(t)}$ wird konstruiert, indem man die Kurven $x = u(t)$, $y = v(t)$ konstruiert (also jedesmal t als Unabhängige = Abszisse, x bezw. y aber als Abhängige = Ordinate) und für jedes t die Ordinate der ersten Kurve $x = u(t)$ zur Abszisse des gesuchten Kurvenpunktes macht, zu seiner Ordinate dagegen die Ordinate der zweiten Kurve.

§ 85. Asymptoten.

1. **Unendlich ferne Punkte** einer Kurve sind diejenigen Punkte, in denen sie von der unendlich fernen Geraden geschnitten wird. Eine Kurve n^{ter} Ordnung hat n reelle oder imaginäre unendlich ferne Punkte.

2. **Asymptoten** sind die Tangenten in den unendlich fernen Punkten einer Kurve. Die Kurve schmiegt sich umsomehr an ihre Asymptote an, je größere Werte die Punktkoordinaten annehmen.

3. Die Kurve n^{ter} Ordnung hat n reelle oder imaginäre Asymptoten.

4. Eine Kurve ungerader Ordnung hat mindestens **eine** reelle Asymptote.

5. Setzt man die Gleichung der Asymptote $y = \lambda x + l$, so erhält man λ und l durch die Substitution $y = \lambda x + l$ in die rational und ganz gemachte Kurvengleichung $F(x, y) = 0$.

Die Summanden höchster Dimension (in x) gleich Null gesetzt liefern eine Gleichung n^{ten} Grades in λ zur Bestimmung der n Richtungskoeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ der n Asymptoten, falls die Kurve n^{ter} Ordnung ist. Für **jeden** Einzelwert λ_i liefern die Glieder zweithöchster Dimension gleich Null gesetzt eine Gleichung zur Bestimmung von l_i.

§ 86. Tangente. Normale.

1. Kennt man im untersuchten Punkt P_0 die Richtung $\operatorname{tg}\tau$ der Kurve, so ist die Gleichung der

Tangente $\quad y - y_0 = \operatorname{tg}\tau \cdot (x - x_0)$,

der **Normalen** $\quad y - y_0 = - \operatorname{cotg}\tau \cdot (x - x_0)$.

2. Die Tangente **im** untersuchten Punkt P_0 läßt sich als diejenige Sekante durch P_0 definieren, welche die Kurve noch in einem P_0 unendlich benachbarten Punkt schneidet.

3. Die Tangente **von** einem Punkt P_0 **aus** an die Kurve $F(x, y) = 0$. Die Tangente im gesuchten Berührpunkt $P_1 = x_1 | y_1$ muß durch den gegebenen Punkt P_0 gehen; ferner muß $F(x_1, y_1) = 0$ sein. Daraus zwei Gleichungen zur Bestimmung von x_1 und y_1.

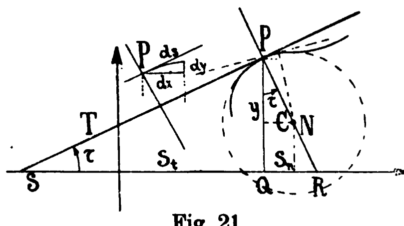


Fig. 21.

4. Nach § 49 ist die Ableitung $y' = \frac{dy}{dx}$ der Funktion $F(x, y) = 0$ die Richtung $\operatorname{tg}\tau$ dieser Kurve an der Stelle x.

5. An der untersuchten Stelle P ist

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

($\pm$ je nachdem die Kurve steigt oder fällt).

$$\sin\tau = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\tau = \frac{dx}{ds},$$

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = y', \quad \operatorname{cotg}\tau = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}.$$

Die Kurve steigt oder fällt, je nachdem bei zunehmendem x die Ableitung $y' > 0$ oder < 0.

6. **Tangente** (SP) .... $T = y\frac{ds}{dy} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}$.

Subtangente (SQ) .... $S_t = y\frac{dx}{dy} = \frac{y}{y'}$.

Normale (RP) .... $N = y\frac{ds}{dx} = y\sqrt{1 + y'^2}$.

Subnormale (QR) ..... $S_n = y\frac{dy}{dx} = yy'$.

T, S_t, N, S_n sind hier Strecken. Fig. 21.

7. **Tangente** und **Normale** im Punkt $P_0 = x_0 | y_0$.

a) $y = f(x)$. Tangente. $y - y_0 = y' \cdot (x - x_0)$.

Normale. $y - y_0 = -\frac{1}{y'} \cdot (x - x_0)$.

b) $F(x, y) = 0$. Tangente. $F_1 \cdot (x - x_0) + F_2 \cdot (y - y_0) = 0$.

Normale. $F_2 \cdot (x - x_0) - F_1 \cdot (y - y_0) = 0$.

c) $x = u(t)$, $y = v(t)$.

Tangente. $\frac{y - y_0}{v'} = \frac{x - x_0}{u'}$

Normale. $(x - x_0) \cdot u' + (y - y_0) \cdot v' = 0$.

u' und v' Ableitungen nach t an der untersuchten Stelle P_0.

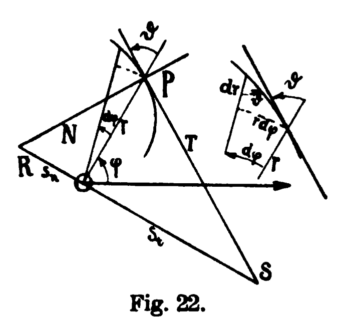


Fig. 22.

8. Bei **Polarkoordinaten** ist der Winkel ϑ vom Radiusvektor zur Tangente gegeben, wenn $F(r, \varphi) = 0$ die Kurvengleichung ist, durch

$$\operatorname{tg}\vartheta = r\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r}{r'},$$

$$\text{wenn } r' = \frac{dr}{d\varphi}.$$

9. An der untersuchten Stelle P ist

$$ds = \pm\sqrt{dr^2 + r^2\,d\varphi^2} = \pm\,d\varphi\sqrt{r^2 + r'^2},$$

($\pm$ je nachdem $\operatorname{tg}\vartheta$ positiv oder negativ ist);

$$\sin\vartheta = \frac{r\,d\varphi}{ds}; \quad \cos\vartheta = \frac{dr}{ds}.$$

10. **Polartangente** (PS) .... $T = \frac{r}{\cos\vartheta} = \frac{r}{r'}\sqrt{r^2 + r'^2}$.

Polarsubtangente (OS) .... $S_t = r\operatorname{tg}\vartheta = \frac{r^2}{r'}$.

Polarnormale (RP) .... $N = \frac{r}{\sin\vartheta} = \sqrt{r^2 + r'^2}$.

Polarsubnormale OR) .... $S_n = r\operatorname{cotg}\vartheta = r'$.

§ 87. Krümmung. Wendepunkt.

1. Der zweite Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$ einer Funktion $F(x, y) = 0$ gibt Aufschluß über die **Art** der **Krümmung** der Kurve $F(x, y) = 0$ an der Stelle x.

2. Ist y'' an der untersuchten Stelle positiv, so ist die Kurve von unten gesehen **konvex**, ist y'' negativ, so ist sie von unten gesehen **konkav**.

3. Notwendige Bedingung für die Existenz eines **Wendepunktes** an der untersuchten Stelle ist $y'' = 0$.

4. **Kontingenzwinkel** $d\tau$ ist der Winkel von zwei unendlich benachbarten Tangenten.

5. Zwei unendlich benachbarte Tangenten schließen den gleichen Winkel ein wie die zu ihnen senkrechten unendlich benachbarten Normalen.

6. Die zwei unendlich benachbarten Normalen an der Stelle P schneiden sich im **Krümmungsmittelpunkt.**

7. **Krümmungskreis** an der Stelle P ist der Kreis durch drei unendlich benachbarte Punkte der Kurve an der Stelle P.

8. Der Krümmungsmittelpunkt ist der Mittelpunkt des Krümmungskreises.

9. **Krümmung** ist der reziproke Wert des Krümmungsradius.

10. Der **Krümmungsradius** ϱ an der untersuchten Stelle P hat den Wert $\varrho = \frac{ds}{d\tau}$; das Vorzeichen von ds ist positiv zu nehmen.

a) Rechtwinklige Koordinaten. $\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$.

b) Polarkoordinaten. $\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$.

c) Parameterdarstellung $\left.\begin{matrix} x = u(t) \\ y = v(t) \end{matrix}\right\}$. $\varrho = \frac{(u'^2 + v'^2)^{3/2}}{u'v'' - v'u''}$.

11. Als Richtung von ϱ werde diejenige vom Kurvenpunkt P nach dem Krümmungsmittelpunkt C angenommen. Dann ergibt sich der Krümmungsmittelpunkt durch die Vektordarstellung $\mathfrak{S} = \mathfrak{s} + \mathfrak{c}$, wo $\mathfrak{S}$ der Vektor vom Nullpunkt nach C, $\mathfrak{s}$ der Vektor vom Nullpunkt nach P und $\mathfrak{c}$ der als Vektor angesehene Krümmungsradius, d. i. die Strecke von P nach C ist. Daraus ergeben sich die

12. Koordinaten ξ und η des Krümmungsmittelpunktes, wenn ϱ_x und ϱ_y die Projektionen des Krümmungsradius ϱ sind, zu

$$\xi = x - \varrho_x \quad \text{und} \quad \eta = y - \varrho_y;$$
$$\text{oder } \xi = x - \varrho \sin\tau, \qquad \eta = y + \varrho \cos\tau;$$

$$\text{oder } \xi = x - \varrho\frac{dy}{ds}, \qquad \eta = y + \varrho\frac{dx}{ds};$$

$$\text{oder } \xi = x - y'\frac{1+y'^2}{y''}, \qquad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Bei Parameterdarstellung ist

$$\xi = x - v'\frac{u'^2+v'^2}{u'v''-v'u''}, \qquad \eta = y + u'\frac{u'^2+v'^2}{u'v''-v'u''}.$$

§ 88. Horizontalstellen. Maxima. Minima. Vertikalstellen.

1. Bedingung für eine **Horizontalstelle.**
   a) Rechtwinklige Koordinaten. $y' = 0$.
   b) Polarkoordinaten. $\varphi + \vartheta = k\pi, \cdots$ k ganzzahlig.
   c) Parameterdarstellung. $v' = 0$.
2. Bedingung für ein **Extremum** in P (siehe auch § 54).

$$\left.\begin{matrix}\textbf{Maximum}\\ \textbf{Minimum}\end{matrix}\right\}, \text{ wenn dort } y' = 0 \text{ und } y'' \left.\begin{matrix}<0\\ >0\end{matrix}\right\}.$$

Ist neben $y' = 0$ auch noch $y'' = 0$, $y''' = 0$, $y^{(4)} = 0 \cdots$, dann gilt:

$$\left.\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}, \text{ wenn } y^{(2n-1)} = 0 \text{ und } y^{(2n)} \left.\begin{matrix}<0\\ >0\end{matrix}\right\}.$$

3. Bedingung für eine **Vertikalstelle.**
   a) Rechtwinklige Koordinaten. $y' = \infty$.
   b) Polarkoordinaten. $\varphi + \vartheta = \frac{1}{2}\pi + k\pi$.
   c) Parameterdarstellung. $u' = 0$.

§ 89. Annäherungskurve. Singuläre Punkte. Oskulation.

1. In einem beliebigen Punkt $P_0 = x_0 | y_0$ kann die Kurve $F(x, y) = 0$ mit beliebiger Genauigkeit ersetzt werden durch

$$F(x, y) = \left[(x - x_0)\cdot F_1 + (y - y_0)\cdot F_2\right] + \frac{1}{2!}\left[(x - x_0)^2\cdot F_{11}\right.$$

$$\left. + 2(x - x_0)(y - y_0)\cdot F_{12} + (y - y_0)^2\cdot F_{22}\right] + \frac{1}{3!}\left[x - x_0)^3\cdot F_{111} + \cdots\right] + \cdots$$

F_1, F_2, F_{11} usw. sind die partiellen Ableitungen von $F(x, y)$ an der Stelle $P_0 = x_0 | y_0$.

Oder in symbolischer Form

$$F(x,y) = \Big[(x - x_0) \cdot F_1 + (y - y_0) \cdot F_2\Big] + \frac{1}{2!}\Big[(x - x_0) \cdot F_1 + (y - y_0) \cdot F_2\Big]^{(2)}$$
$$+ \frac{1}{3!}\Big[(x - x_0) \cdot F_1 + (y - y_0) \cdot F_2\Big]^{(3)} + \cdots .$$

Man erhält das nichtsymbolische Resultat, indem man die Potenzoperation $[\;]^{(2)}$, $[\;]^{(3)}$ usw. ausführt, statt $F_i F_k$, $F_i F_k F_l$ usw. aber F_{ik}, F_{ikl} usw. setzt.

2. Die Annäherungsparabel n^{ter} Ordnung der Kurve $y = f(x)$ im Punkt $P_0 = x_0 | y_0$ ist

$$y = f(x)_0 + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

3. Je später man diese Reihen abbricht, mit um so größerer Genauigkeit schmiegt sich die Annäherungskurve an die gegebene Kurve an.

4. Die Annäherung ersten Grades an die Kurve $F(x, y) = 0$ im Punkt $P_0 = x_0 | y_0$ ist die Tangente

$$(x - x_0) \cdot F_1 + (y - y_0) \cdot F_2 = 0 .$$

5. Die Annäherung zweiten Gerades an die Kurve $F(x, y) = 0$ im Punkt $P_0 = x_0 | y_0$ ist der Annäherungskegelschnitt

$$2(x - x_0) \cdot F_1 + 2(y - y_0) \cdot F_2 + (x - x_0)^2 \cdot F_{11} + 2(x - x_0)(y - y_0) \cdot F_{12}$$
$$+ (y - y_0)^2 \cdot F_{22} = 0.$$

6. Die Annäherung zweiten Grades der Kurve $y = f(x)$, die Näherungsparabel, im Punkt $P_0 = x_0 | y_0$ ist

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1!} \cdot f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \cdot f''(x_0) .$$

7. In einem **Doppelpunkt** hat die Kurve $F(x, y) = 0$ keine Annäherung erster Ordnung. Die erste Annäherung ist ein Geradenpaar.

8. P_0 ist ein Doppelpunkt, wenn für ihn

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0.$$

9. Die Annäherungskurve zweiter Ordnung, das Geradenpaar, im Doppelpunkt der Kurve $F(x, y) = 0$ ist

$$F_{11} \cdot (x - x_0)^2 + 2 F_{12} \cdot (x - x_0)(y - y_0) + F_{22} \cdot (y - y_0)^2 = 0.$$

10. Je nachdem die Diskriminante dieser Gleichung

$$\Delta = F_{12}{}^2 - F_{11} F_{22}$$

größer, kleiner oder gleich Null, besteht das Tangentenpaar aus zwei reellen und verschiedenen Geraden (**eigentlicher Doppelpunkt**), aus zwei konjugiert imaginären Geraden mit reellem Schnittpunkt (dem **isolierten Punkt**) oder zwei zusammenfallenden Geraden (**Rückkehrpunkt** oder **Spitze**).

11. Zwei Kurven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ durch den gemeinsamen Punkt P_0 haben in ihm eine **Oskulation n^ter Ordnung**, wenn dort neben $f(x_0) = \varphi(x_0)$ auch noch alle Ableitungen beider Funktionen einschließlich der n^{ten} einander gleich sind. Ist die Berührung gerader Ordnung, so durchsetzen sich die Kurven in P_0; ist sie ungerader Ordnung, so berühren sie sich, ohne sich zu schneiden.

12. Die **oskulierende Gerade** ist die Tangente. Der **oskulierende Kreis** ist der Krümmungskreis. Die **Wendetangente** (= Tangente im Wendepunkt) hat mit der Kurve eine Berührung zweiter Ordnung und durchsetzt die Kurve.

§ 90. Enveloppe. Trajektorien. Evolute. Evolvente.

1. Je zwei beliebige Kurven des Kurvensystems $F(x, y, C) = 0$ schneiden sich im allgemeinen unter endlichen Winkeln, zwei unendlich benachbarte unter unendlich kleinen Winkeln.

2. **Enveloppe** oder **Einhüllende** eines Kurvensystems ist der geometrische Ort der Schnittpunkte unendlich benachbarter Kurven des Systems.

3. Die Enveloppe der Kurvenschar $F(x, y, C) = 0$ ergibt sich durch Elimination des Parameters C aus den Gleichungen

$$F(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0.$$

4. Die Enveloppe einer Kurvenschar hat mit jeder Kurve im gemeinsamen (nichtsingulären) Punkt die Tangente gemeinsam.

5. Die Enveloppe des Kurvensystems $F(x, y, a, b) = 0$, mit a und b als zwei durch die Relation $\varphi(a, b) = 0$ verbundenen Parametern, ergibt sich durch Elimination aus den drei Gleichungen

$$F(x, y, a, b) = 0, \quad \varphi(a, b) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial b} = \frac{\partial F}{\partial b} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a}.$$

6. Sind zwei Kurvenscharen derart kombiniert, daß jede Kurve der einen Schar jede Kurve der andern Schar unter dem gleichen gegebenen Winkel α schneidet, so nennt man das eine System das System der **Isogonaltrajektorien** zum andern. Ist die Gleichung des ersten Systems gegeben in

a) rechtwinkligen Koordinaten durch $F(x, y, y') = 0$ bezw. $F(x, y, C) = 0$, so ist die Gleichung des zweiten Systems bestimmt durch

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{II} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_I + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)_I \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

b) Polarkoordinaten. Erstes System $F(r, \varphi, C) = 0$ oder $F(r, \varphi, r') = 0$; zweites System

$$\left(\frac{r}{r'}\right)_{II} = \frac{\left(\frac{r}{r'}\right)_I + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \left(\frac{r}{r'}\right)_I \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

7. **Orthogonaltrajektorien** speziell hat man, wenn $\alpha = 90^0$ ist, d. h. jede Kurve der einen Schar jede Kurve der andern senkrecht schneidet.

a) Rechtwinklige Koordinaten. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{II} = -1 : \left(\frac{dy}{dx}\right)_I$.

b) Polarkoordinaten. $\left(\frac{r}{r'}\right)_{II} = -1 : \left(\frac{r}{r'}\right)_I$.

8. **Evolute** einer Kurve ist der geometrische Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte.

9. Die Evolute einer Kurve ist die Enveloppe aller Normalen.

10. **Evolventen** einer Kurve sind die Orthogonaltrajektorien ihrer Tangenten.

11. Zur Evolute ist die Kurve selbst eine der unendlich vielen Evolventen.

12. Die Gleichung der Evolute der Kurve $F(x,y)=0$ findet man durch Elimination von x und y aus den drei Gleichungen

$$\xi = x - y' \frac{1+y'^2}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}, \quad F(x,y)=0.$$

Die laufenden Koordinaten der Evolute sind ξ, η.

13. Die Gleichung der Evolventen findet man als Orthogonalkurven zum System der Tangenten der gegebenen Kurve.

14. Das Bogenelement der Evolute einer Kurve ist gleich dem Differential des Krümmungsradius an der untersuchten Stelle.

15. Der Endpunkt des von einem beliebigen Anfangspunkt aus auf der jeweiligen Tangente abgewickelten Kurvenbogens beschreibt eine Evolvente. Für jeden andern Anfangspunkt erhält man eine andere der unendlich vielen Evolventen.

§ 91. Spezielle algebraische Kurven.

1. **Verallgemeinerte Parabel m^{ter} Ordnung.**

$$y = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1} x + a_m.$$

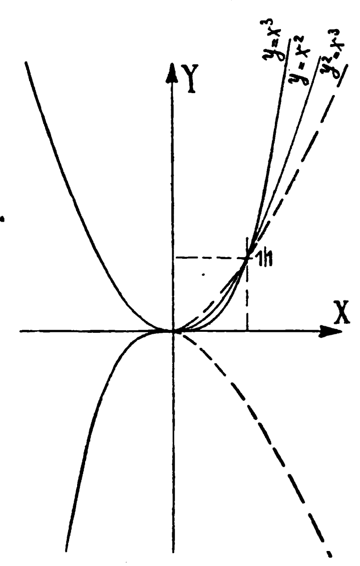


Fig. 23. Einheit: 1 cm.

2. **Gewöhnliche Parabel.**

$y=x^2$, Fig. 23. (Siehe Kegelschnitte.)

3. **Kubische Parabel.**

$y=x^3$, Fig. 23. Im Punkt $P=x|y$ ist: Richtung $\operatorname{tg}\tau = 3x^2$.

$$T = \tfrac{1}{3} x \sqrt{1+9x^4}.$$
$$N = x^3 \sqrt{1+9x^4}.$$
$$S_t = \tfrac{1}{3} x. \quad S_n = 3x^5.$$
$$\varrho = \frac{(1+9x^4)^{3/2}}{6x}.$$

Wendepunkt $0|0$.

4. **Neilsche** oder **semikubische Parabel.**

$y^2=x^3$. Fig 23. Im Punkt $P=x|y$ ist: Richtung $\operatorname{tg}\tau = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

$$T = \frac{1}{3} x \sqrt{4 + 9x}. \qquad N = \frac{1}{2} x^{3/2} \sqrt{4 + 9x}.$$

$$S_t = \frac{2}{3} x. \qquad S_n = \frac{3}{2} x^2.$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{x}\,(4 + 9x)^{3/2}}{6}.$$

Der Nullpunkt ist Rückkehrpunkt = Spitze.

5. **Parabel** vierter Ordnung $y = x^4$.

Sie berührt die x-Axe in vier unendlich benachbarten Punkten.

0|0 ist ein Flachpunkt.

6. **Verallgemeinerte Hyperbel** $x^m y^n = c$.

Im Punkt $P = x|y$ ist die Richtung $\operatorname{tg}\tau = -\frac{my}{nx}$.

$$T = -\frac{1}{m} \sqrt{n^2x^2 + m^2y^2}. \qquad N = \frac{y}{nx} \sqrt{n^2x^2 + m^2y^2}.$$

$$S_t = -\frac{nx}{m}. \qquad S_n = -\frac{my^2}{nx}.$$

$$\varrho = \frac{(n^2x^2 + m^2y^2)^{3/2}}{mn\,(m + n)\,xy}.$$

Fläche von $x = 0$ an: $F = \frac{nxy}{n - m}$.

Spezialfall: **Polytrope** $yx^n = c$.

Im Punkt $P = x|y$ ist: $\operatorname{tg}\tau = -\frac{ny}{x}$.

$$T = -\frac{1}{n} \sqrt{x^2 + n^2y^2}. \qquad N = \frac{y}{x} \sqrt{x^2 + n^2y^2}.$$

$$S_t = -\frac{x}{n}. \qquad S_n = -\frac{ny^2}{x}.$$

$$\varrho = \frac{(x^2 + n^2y^2)^{3/2}}{n\,(n + 1)\,xy}.$$

Fläche von $x = 0$ an: $F = \frac{xy}{1 - n}$.

7. Andere algebraische Kurven siehe auch: Zykloiden etc.

§ 92. Trigonometrische und zyklometrische, Logarithmus- und Exponentialkurven.

1. **Sinuskurve** $y = \sin x$, Fig. 24.

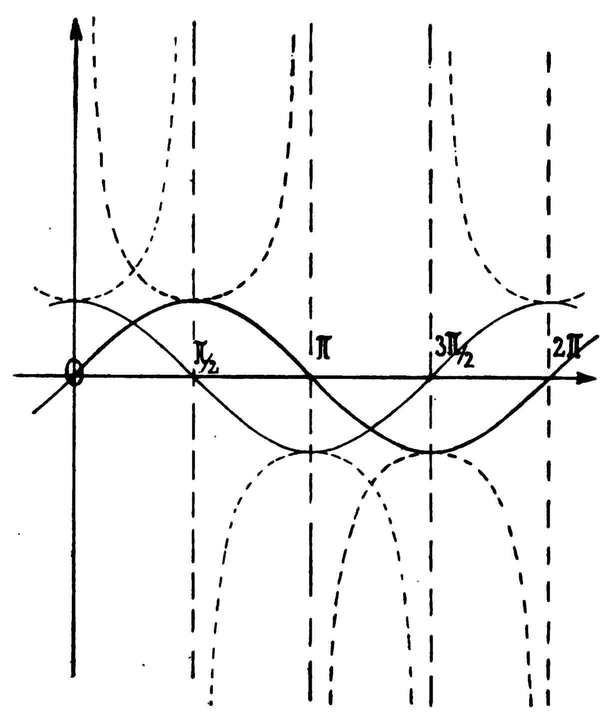


Fig. 24. Einheit: 1 cm.

Im Punkt $P = x|y$ ist: $\operatorname{tg}\tau = \cos x$.

$T = \operatorname{tg} x \cdot \sqrt{1 + \cos^2 x}$. $\quad N = \sin x \cdot \sqrt{1 + \cos^2 x}$.

$S_t = \operatorname{tg} x$. $\quad S_n = \sin x \cos x$.

$$\varrho = \frac{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}{-\sin x}.$$

An jeder Extremstelle ist $\varrho = 1$. Die Schnittpunkte mit der x-Axe sind Wendepunkte.

Fläche von $x = 0$ an: $F = 1 - \cos x$. Fläche des ersten Quadranten: $F_0 = 1$.

2. **Kosinuskurve** $y = \cos x$, Fig. 24, dünner gezeichnet. Im Punkt $P = x|y$ ist: $\operatorname{tg}\tau = -\sin x$.

$$T = -\operatorname{cotg} x \cdot \sqrt{1 + \sin^2 x}. \quad N = \cos x \cdot \sqrt{1 + \sin^2 x}.$$

$$S_t = -\operatorname{cotg} x. \qquad S_n = -\sin x \cos x.$$

$$\varrho = \frac{(1 + \sin^2 x)^{3/2}}{-\cos x}.$$

An jeder Exstremstelle ist $\varrho = 1$. Die Schnittpunkte mit der x-Axe sind Wendepunkte.

Fläche von $x = 0$ an: $F = \sin x$. Fläche des ersten Quadranten: $F_0 = 1$.

3. **Kosekanskurve** $y = \operatorname{cosec} x$ und **Sekanskurve** $y = \sec x$, Fig. 24, stärker und schwächer gestrichelt.

4. **Tangenskurve** $y = \operatorname{tg} x$, Fig. 25.

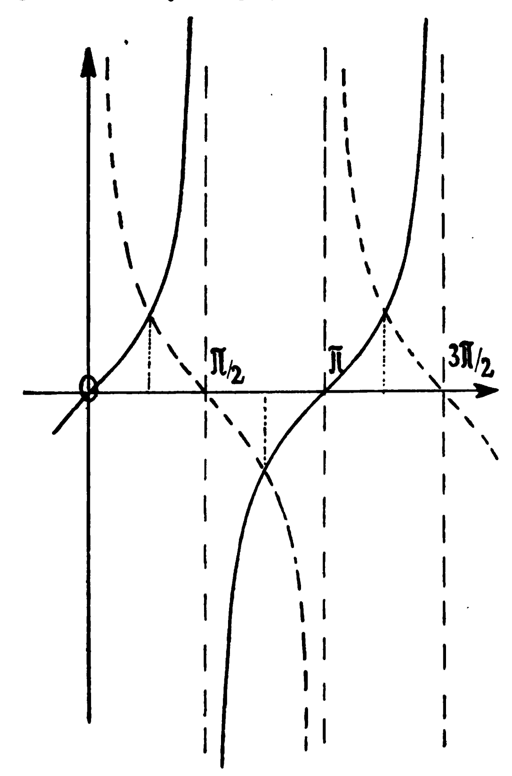


Fig. 25. Einheit: 1 cm.

Im Punkt $P = x|y$ ist: $\operatorname{tg}\tau = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$T = \operatorname{tg}x \cdot \sqrt{1 + \cos^4 x}$. $\quad N = \operatorname{tg}x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \sqrt{1 + \cos^4 x}$.

$S_t = \sin x \cos x$. $\quad S_n = \operatorname{tg}x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)$.

$$\varrho = \frac{(1 + \cos^4 x)^{3/2}}{2 \operatorname{tg}x \cdot \cos^4 x}.$$

Fläche von $x = 0$ an: $F = \lg \cos x$.

Fläche bis $x = {}^1/_4\pi$: $F_0 = {}^1/_2 \lg 2$.

5. **Kotangenskurve** $y = \operatorname{cotg} x$, Fig. 25, getrichelt.

Im Punkt $P = x|y$ ist: $\operatorname{tg}\tau = \frac{-1}{\sin^2 x}$.

$T = -\operatorname{cotg}x \cdot \sqrt{1 + \sin^4 x}$. $\quad N = \operatorname{cotg}x \cdot (1 + \operatorname{cotg}^2 x) \cdot \sqrt{1 + \sin^4 x}$.

$S_t = -\cos x \sin x$. $\quad S_n = -\operatorname{cotg}x \cdot (1 + \operatorname{cotg}^2 x)$.

$$\varrho = \frac{(1 + \sin^4 x)^{3/2}}{2 \operatorname{cotg}x \cdot \sin^4 x}.$$

Fläche von $x = x$ bis $x = {}^1/_2\pi$: $F = -\lg \sin x$.

Fläche von $x = {}^1/_4\pi$ bis $x = {}^1/_2\pi$: $F_0 = {}^1/_2 \lg 2$.

6. Die **zyklometrischen Funktionen** $y = \arcsin x$ oder $x = \sin y$ etc. sind durch die Kurven Fig. 24 und 25 dargestellt, wenn man die x- und y-Axe vertauscht.

7. **Exponentialkurve** $y = e^x$ bezw. $y = a^x$ Fig. 26.

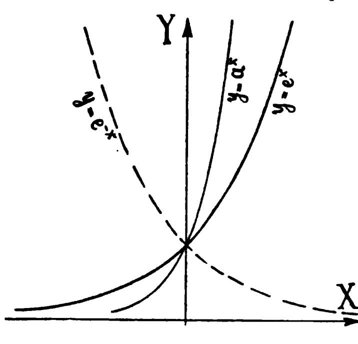


Fig. 26. Einheit 1 cm; $a = 10$.

Im Punkt $P = x|y$ von $y = e^x$ ist: $\operatorname{tg}\tau = e^x$.

$T = \sqrt{1 + y^2}$. $\quad N = y\sqrt{1 + y^2}$.

$S_t = 1$. $\quad S_n = y^2$.

Die Exponentialkurve $y = e^x$ bezw. $y = a^x$ hat konstante Subtangente.

Die Fläche der Kurve $y = e^x$ von $x = 0$ an ist $F = e^x - 1$; von $x = -\infty$ bis $x = 0$ ist die Fläche $F_0 = 1$.

Die Bogenlänge der Kurve $y = e^x$ von $x = 0$ an ist

$$s = x + \sqrt{1+y^2} - \lg(1+\sqrt{1+y^2}) - \sqrt{2} + \lg(1+\sqrt{2}).$$

8. Die **Logarithmuskurve** $y = \lg x$ bezw. $y = \overset{a}{\log} x$ oder $x = e^y$ bezw. $x = a^y$ sind durch die Kurven Fig. 26 dargestellt, wenn man die x- und y-Axe vertauscht.

9. Die Kurve $y = e^{-x}$ oder $y = 1 : e^x$ ist ebenfalls in Fig. 26 zur Darstellung gebracht.

§ 93. Kettenlinie. Traktrix.

a) Kettenlinie.

1. Ein an zwei Punkten aufgehängter Faden (Kette), dessen Belastung proportional der Bogenlänge ist, biegt sich nach einer Kettenlinie durch, Fig. 27.

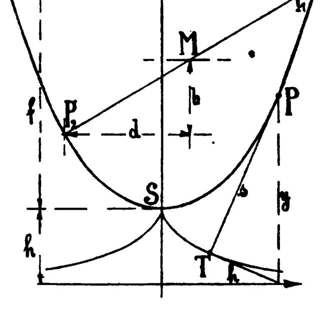


Fig. 27. h = 1; Einheit 1 cm.

2. Die Gleichung der Kettenlinie ist

$$y = h \operatorname{Cos} \frac{x}{h}$$

$$\text{oder } y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right)$$

$$\text{oder } x = h \lg \frac{y + \sqrt{y^2 - h^2}}{h}.$$

3. Im Punkt $P = x|y$ ist:

$$\operatorname{tg} \tau = y' = \operatorname{Sin} \frac{x}{h} = \frac{\sqrt{y^2 - h^2}}{h}, \qquad \cos \tau = \frac{h}{y}.$$

$$T = \frac{y^2}{\sqrt{y^2 - h^2}}. \quad N = \frac{y^2}{h}. \quad S_t = \frac{hy}{\sqrt{y^2 - h^2}}. \quad S_n = \frac{y}{h}\sqrt{y^2 - h^2}.$$

4. Der Krümmungsradius in P ist gleich der Normalen.

$$\varrho = N = \frac{y^2}{h} = \frac{h}{\cos^2 \tau}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt ist gegeben durch

$$\xi = x - \frac{y}{h}\sqrt{y^2 - h^2}, \qquad \eta = 2y.$$

5. Die Evolute der Kettenlinie hat die Gleichung

$$4h\xi = 4h^2 \lg \frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - 4h^2}}{2h} - \eta\sqrt{\eta^2 - 4h^2}.$$

6. Die Fläche von $x = 0$ an ist

$$F = h^2 \operatorname{Sin}\frac{x}{h} = \frac{h^2}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = h\sqrt{y^2 - h^2}.$$

7. Der Bogen SP hat die Länge

$$s = h \operatorname{Sin}\frac{x}{h} = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = \sqrt{y^2 - h^2} = PT.$$

8. Zu einer gegebenen Kette(nlinie) von gegebener Länge $2l$ mit gleichhohen Aufhängepunkten im Abstand $2d$ findet man den Pfeil f aus den Gleichungen

$$d \cdot \operatorname{Sin}\varphi = l\varphi; \quad \varphi h = d; \quad f = l \cdot \operatorname{Cotg}\varphi - h.$$

9. Liegen die Aufhängepunkte P_1 und P_2 verschieden hoch (Horizontalentfernung $2d$, Vertikalentfernung $2b$), so ergibt sich der Vertikalabstand f' des tiefsten Punktes S der Kettenlinie vom Mittelpunkt M der Strecke P_1P_2 durch die Gleichungen

$$d \cdot \operatorname{Sin}\varphi = \varphi\sqrt{l^2 - b^2}; \quad h\varphi = d; \quad f' = l \cdot \operatorname{Cotg}\varphi - h.$$

Und der Horizontalabstand a durch die Gleichungen

$$l \cdot \operatorname{Tg}\psi = b; \quad a = \psi h.$$

b) Traktrix.

10. Die Traktrix (Antifriktionskurve) ist eine der Evolventen der Kettenlinie, für den Scheitel S als Anfangspunkt der Abwicklung. Fig. 27.

11. Ihre Gleichung ist

$$\pm x = h \lg \frac{h + \sqrt{h^2 - y^2}}{y} - \sqrt{h^2 - y^2}.$$

oder $x = h(\operatorname{Tg}\varphi - \varphi)$; $y = \dfrac{h}{\operatorname{Cos}\varphi}$. (Parameter φ.)

12. Im Punkt $P = x|y$ ist: $\operatorname{tg}\tau = \mp \frac{y}{\sqrt{h^2 - y^2}} = y'$.

$$T = h; \qquad N = \mp \frac{hy}{\sqrt{h^2 - y^2}}.$$

$$S_t = \mp \sqrt{h^2 - y^2}; \qquad S_n = \mp \frac{y^2}{\sqrt{h^2 - y^2}}.$$

Das obere Vorzeichen gilt dem rechten Kurventeil, das untere dem linken.

13. Der Krümmungsradius ist

$$\varrho = TP = \frac{h}{y} \sqrt{h^2 - y^2}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt ist gegeben mit

$$\xi = x + \sqrt{h^2 - y^2}; \qquad y\eta = h^2.$$

Die Evolute ist die Kettenlinie.

14. Die x-Axe ist Asymptote der Traktrix.

15. Der Bogen ST ist gegeben durch

$$s = h \lg \frac{y}{h}.$$

§ 94. **Zykloide.**

1. Die Punkte eines auf einer Geraden ohne Gleitung rollenden Kreises beschreiben **Zykloiden.**

2. Die **gemeine Zykloide** wird von den Umfangspunkten beschrieben, die **verlängerte Zykloide** von einem Punkt außerhalb des Rollkreises, die **verkürzte Zykloide** von einem Punkt innerhalb derselben. Fig. 28.

3. Gleichung und Konstruktion aller Zykloiden durch Superposition der Wege. Fig. 28.

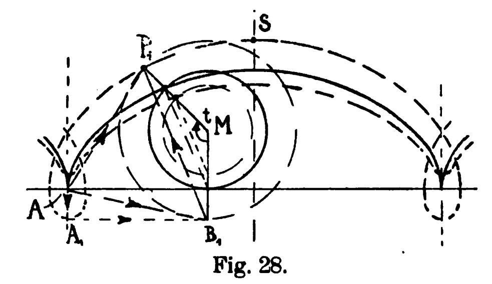


Fig. 28.

Wenn a der Radius des Rollkreises, d der Abstand des die Kurve beschreibenden Punktes vom Mittelpunkt M ist, so wird dargestellt

a) die Translation durch

$$x_1 = at, \qquad y_1 = a - d,$$

b) die Rotation durch

$$x_2 = -d\sin t, \qquad y_2 = d - d\cos t,$$

die Gesamtbewegung also durch

$$x = at - d\sin t, \qquad y = a - d\cos t.$$

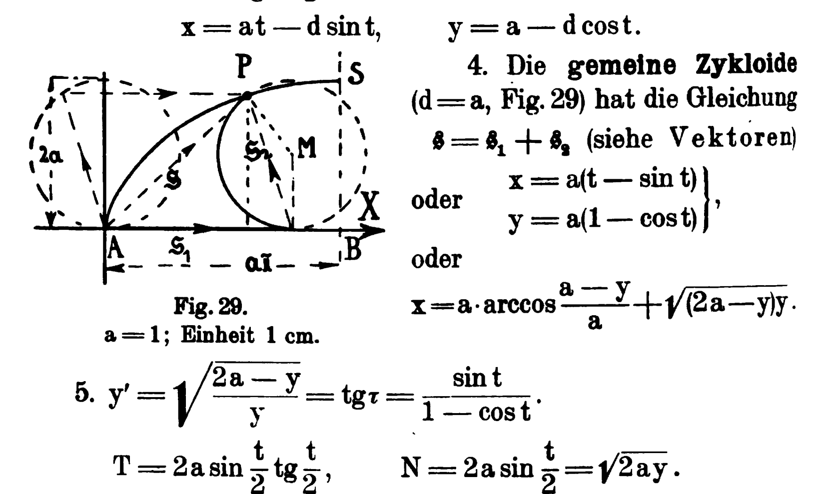


Fig. 29.
$a = 1$; Einheit 1 cm.

4. Die **gemeine Zykloide** ($d = a$, Fig. 29) hat die Gleichung

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2 \text{ (siehe Vektoren)}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}\right\},$$

oder

$$x = a \cdot \arccos\frac{a-y}{a} + \sqrt{(2a-y)y}.$$

5. $$y' = \sqrt{\frac{2a-y}{y}} = \operatorname{tg}\tau = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

$$T = 2a\sin\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}, \qquad N = 2a\sin\frac{t}{2} = \sqrt{2ay}.$$

$$S_t = 2a\sin^2\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}, \qquad S_n = a\sin t.$$

Die Normale in P hat die Richtung und Größe $\mathfrak{s}_2$.

6. Krümmungsradius $\varrho = 2N$.

Im Scheitel ist $\varrho = 4a$; in A ist $\varrho = 0$.

Der Krümmungsmittelpunkt ist bestimmt durch

$$\xi = a(t + \sin t), \qquad \eta = -a(1 - \cos t).$$

Die Evolute der Zykloide ist eine ihr kongruente Zykloide.

7. Die Fläche von $x = 0$ an ist

$$F = a^2[{}^3/_2\, t - 2\sin t + {}^1/_4 \sin 2t] = {}^3/_2\, ax - {}^1/_2\, y\sqrt{(2a-y)y}.$$

Speziell ist bis zum Scheitel S die Fläche $F_0 = {}^3/_2\, a^2\pi$.

8. Der Bogen von $x = 0$ an ist

$$s = 4a\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right) = 8a\sin^2\frac{t}{4} = 4a - 2\sqrt{2a(2a-y)}.$$

Speziell ist der Bogen $AS = 4a$.

§ 95. **Epizykloide.**

1. Die Punkte eines auf einem Kreis (= Grundkreis) ohne Gleitung rollenden zweiten Kreises (= Rollkreis) beschreiben Epizykloiden.

2. Die **gemeine Epizykloide** wird von den Umfangspunkten des Rollkreises beschrieben, die **verlängerte** von einem Punkt außerhalb, die **verkürzte** von einem Punkt innerhalb des Rollkreises. (Fig. 30.)

3. Gleichung und Konstruktion aller Epizykloiden durch Superposition der Wege.

4. Wenn R der Radius des Grundkreises, r der des Rollkreises und d der Abstand des die Kurve beschreibenden Punktes vom Mittelpunkt C des Rollkreises ist, so wird dargestellt ($\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2$ siehe Vektoren)

a) die Translation durch

$$x_1 = (R + a)\cos\varphi - d,$$
$$y_1 = (R + a)\sin\varphi,$$

Fig. 30.

b) die Rotation durch

$$x_2 = d - d\cos(\varphi + t), \qquad y_2 = - d\sin(\varphi + t),$$

die Gesamtbewegung also durch

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + a)\cos\varphi - d\cos(\varphi + t) \\ y &= (R + a)\sin\varphi - d\sin(\varphi + t) \end{aligned}\right\}, \quad \varphi = \frac{a\,t}{R}.$$

5. Die **gemeine Epizykloide** (d = a, Fig. 31) hat die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + a)\cos\frac{a\,t}{R} - a\cos\left(\frac{R + a}{R}\,t\right) \\ y &= (R + a)\sin\frac{a\,t}{R} - a\sin\left(\frac{R + a}{R}\,t\right) \end{aligned}\right|.$$

Oder wenn man $R = na$, $m = n + 1$ setzt,

$$\left.\begin{array}{l} x = a(m\cos\varphi - \cos m\varphi) \\ y = a(m\sin\varphi - \sin m\varphi) \end{array}\right\}, \quad \varphi = \frac{t}{n}.$$

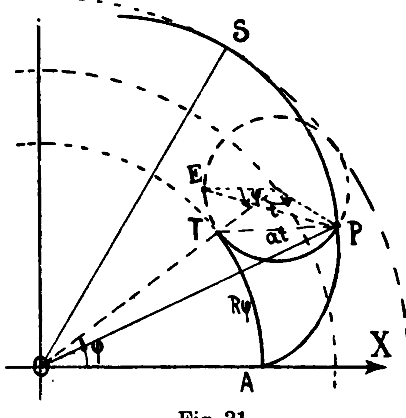


Fig. 31.
$R = 3$, $a = 1$, Einheit 1 cm.

6. Die Normale in P hat die Richtung PT. Die Richtung der Kurve in P ist

$$y' = \operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\frac{\varphi(n+2)}{2}$$
$$= \operatorname{tg}\frac{l\varphi}{2},$$

wenn man

$$n + 2 = m + 1 = l$$

setzt.

$$T = \frac{y}{\sin\frac{l\varphi}{2}}, \quad N = \frac{y}{\cos\frac{l\varphi}{2}}.$$

$$S_t = y\operatorname{cotg}\frac{l\varphi}{2}, \qquad S_n = y\operatorname{tg}\frac{l\varphi}{2}.$$

7. Krümmungsradius $\varrho = \frac{4am}{l}\sin\frac{t}{2}$. Speziell im Scheitel S ist $\varrho = \frac{4am}{l}$, in A ist $\varrho = 0$. Der Krümmungsmittelpunkt ist gegeben durch

$$\left.\begin{array}{l} \xi = a_1[m\cos\varphi + \cos m\varphi] \\ \eta = a_1[m\sin\varphi + \sin m\varphi] \end{array}\right\}, \quad a_1 = \frac{na}{l}.$$

Die Evolute der Epizykloide ist eine ihr ähnliche Epizykloide.

8. Die Fläche zwischen OA und dem Leitstrahl OP ist

$$F = \frac{lma^2}{2n}(t - \sin t).$$

9. Der Bogen AP ist

$$s = \frac{4ma}{n}\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right).$$

Speziell ist der Bogen $AS = \frac{4ma}{n}$.

10. Alle Epizykloiden werden algebraische Kurven, wenn $n = R:a$ rational ist. Speziell gibt

a) $R = a$ die **Paskalsche Schneckenlinie**; d ist beliebig. Wird $R = d = a$, so spezialisiert sich die Kurve weiter zur **Kardioide** (Herzkurve, siehe § 98).

b) $a = \infty$ die **Kreisevolvente** (siehe § 97).

§ 96. Hypozykloide.

1. Die Punkte eines innen auf einem Kreis (= Grundkreis) rollenden zweiten Kreises (= Rollkreis) beschreiben Hypozykloiden.

2. Die **gemeine Hypozykloide** wird von den Umfangspunkten des Rollkreises beschrieben, die **verlängerte** bezw. **verkürzte** von Punkten außerhalb und innerhalb desselben. Fig. 32.

3. Gleichung und Konstruktion der Hypozykloide wie § 95.

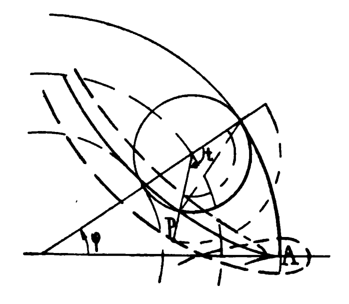


Fig. 32.

$$\left.\begin{array}{l} x = (R - a)\cos\varphi + d\cos(t - \varphi) \\ y = (R - a)\sin\varphi - d\sin(t - \varphi) \end{array}\right\}, \quad \varphi = \frac{at}{R}.$$

4. Speziell hat die **gemeine Hypozykloide** ($d = a$, Fig. 33) die nachfolgenden Eigenschaften. Ihre Gleichung ist

$$\left.\begin{array}{l} x = (R - a)\cos\frac{at}{R} + a\cos\left(\frac{R - a}{R}t\right) \\ y = (R - a)\sin\frac{at}{R} - a\sin\left(\frac{R - a}{R}t\right) \end{array}\right\}.$$

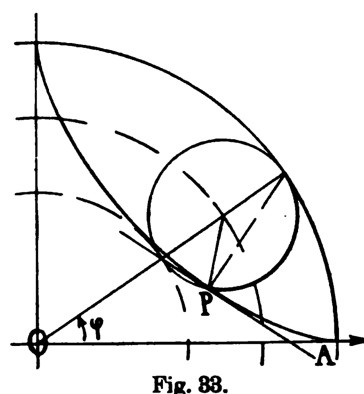


Fig. 83.
R = 4, a = 1, Einheit 1 cm.

Oder wenn man

$$R = na, \quad m = n - 1$$

setzt,

$$\left. \begin{aligned} x &= a(m\cos\varphi + \cos m\varphi) \\ y &= a(m\sin\varphi - \sin m\varphi) \end{aligned} \right\}.$$

5. Die Normale in P hat die Richtung PT. Die Richtung der Kurve in P ist

$$y' = \operatorname{tg}\tau = -\operatorname{tg}\frac{\varphi(n-2)}{2}$$

$$= -\operatorname{tg}\frac{l\varphi}{2},$$

wenn man $n - 2 = m - 1 = l$ setzt.

$$T = \frac{y}{\sin\frac{l\varphi}{2}}, \qquad N = \frac{-y}{\cos\frac{l\varphi}{2}}.$$

$$S_t = -y\operatorname{cotg}\frac{l\varphi}{2}, \qquad S_n = -y\operatorname{tg}\frac{l\varphi}{2}.$$

6. Krümmungsradius $\varrho = \frac{4am}{l}\sin\frac{t}{2} = \frac{4am}{l}\sin\frac{n\varphi}{2}$.

Speziell im Scheitel ist $\varrho = \frac{4am}{l}$, in A ist $\varrho = 0$.

Der Krümmungsmittelpunkt ist gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a_1(m\cos\varphi - \cos m\varphi) \\ \eta &= a_1(m\sin\varphi + \sin m\varphi) \end{aligned} \right\}, \quad a_1 = \frac{na}{l}.$$

Die Evolute der Hypozykloide ist eine ihr ähnliche Hypozykloide.

7. Die Fläche zwischen OA und dem Leitstrahl OP ist

$$F = \frac{lma^2}{2n}(t - \sin t).$$

8. Der Bogen AP ist

$$s = \frac{4ma}{n}\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right).$$

Speziell ist der Bogen $AS = \frac{4ma}{n}$.

9. Alle Hypozykloiden werden algebraische Kurven, wenn $n = R : a$ rational ist. Speziell gibt

a) $R = 4a$, $d = a$ die **Astroide** (Sternkurve, siehe § 98),

b) $R = 2a$, $d = a$ die Gerade AO,

c) $R = 2a$, $d \gtrless a$ eine Ellipse.

§ 97. Die Kreisevolvente.

1. Die Punkte einer auf einem Kreis sich abwälzenden Geraden beschreiben Kreisevolventen.

2. Gleichung und Konstruktion der Kurve durch Superposition der Wege $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2$. (Siehe Vektoren.)

$$\left.\begin{array}{l} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{array}\right\},$$

oder in Polarkoordinaten, wenn der Krümmungsradius

$$\varrho = \sqrt{r^2 - a^2},$$

$$\varphi = \frac{\varrho}{a} - \operatorname{arctg} \frac{\varrho}{a}.$$

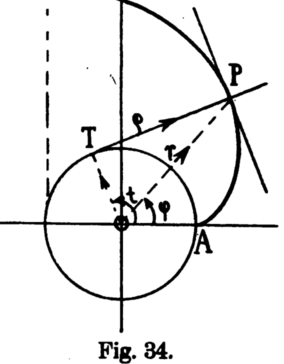
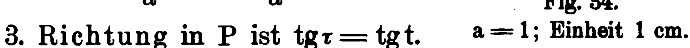


Fig. 34.
$a = 1$; Einheit 1 cm.



3. Richtung in P ist $\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} t$.

Die Normale ist Tangente an den erzeugenden Kreis.

$$T = \frac{y}{\sin t}, \qquad N = \frac{y}{\cos t}.$$

$$S_t = y \operatorname{cotg} t, \qquad S_n = y \operatorname{tg} t.$$

4. Krümmungsradius in P ist $\varrho = PT$ $= \text{Kreisbogen } AT = at.$

Der Krümmungsmittelpunkt ist T.

5. Die Fläche AOP ist $F = {}^1/_6\, a^2 t^3$.

6. Der Bogen AP ist $s = \frac{\varrho^2}{2a} = \frac{at^2}{2}$.

§ 98. Paskalsche Linie. Astroide.

1. Die **Paskalsche Linie** ist eine spezielle Epizykloide (siehe § 95). Ihre Gleichung ist für die nach links positiv zählende x-Axe mit dem Anfangspunkt M (wo AM = a)

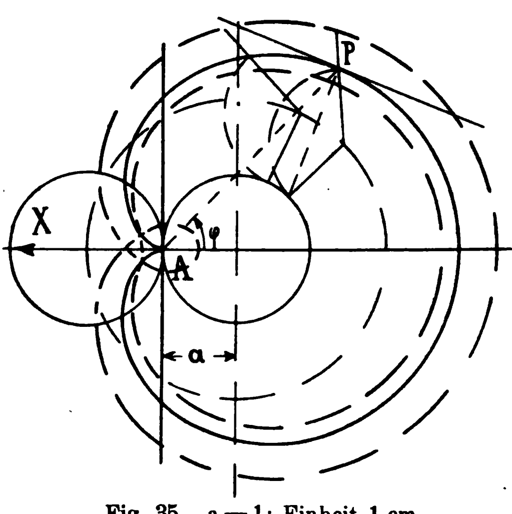


Fig. 35. a = 1; Einheit 1 cm.

$$\left.\begin{aligned} x &= 2a\cos t - d\cos 2t \\ y &= 2a\sin t - d\sin 2t \end{aligned}\right\}.$$

2. Wenn d = a, wird die Paskalsche Linie zur **Kardioide** (Fig. 35, ausgezogen)

$$\left.\begin{aligned} x &= a(2\cos t - \cos 2t) \\ y &= a(2\sin t - \sin 2t) \end{aligned}\right\},$$

oder

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2),$$

wenn A Anfangspunkt, oder in Polarkoordinaten

$$r = 2a(1 + \cos\varphi).$$

Die Gesamtfläche der Kardioide ist $6a^2\pi$.

Der Umfang ist 16a.

Bewegen sich auf einem Kreis zwei Punkte P_1 und P_2 so, daß der eine die doppelte gleichförmige Geschwindigkeit hat wie der andere, so umhüllt die Gerade P_1P_2 eine Kardioide.

3. Die **Astroide**, Fig. 36, ist eine spezielle Hypozykloide (siehe § 96). Ihre Gleichung ist

$$4x = a(3\cos t + \cos 3t), \quad 4y = a(3\sin t - \sin 3t),$$

$$\text{oder } x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t,$$

$$\text{oder } x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

$$\text{Richtung } \operatorname{tg}\tau = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} = -\operatorname{tg} t.$$

Der Krümmungsradius ist

$$\varrho = 3\,a \sin t \cos t.$$

Der Krümmungsmittelpunkt ist gegeben durch

$$\xi = a \cos^3 t + 3\,a \cos t \sin^2 t,$$
$$\eta = 3\,a \cos^2 t \sin t + a \sin^3 t.$$

Die Evolute der Astroide ist wieder eine Astroide.

Die Fläche von $t = 0$ an ist

$$F = \frac{3}{16} a^2 \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t\right);$$

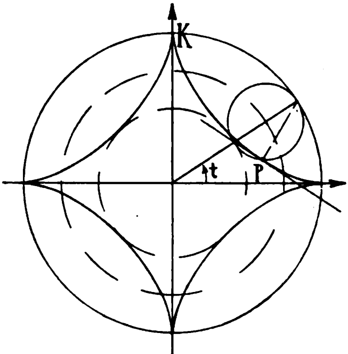


Fig. 36. $a = 2$; Einheit 1 cm.

die Gesamtfläche der Astroide ist $F_0 = {}^3/_8\, a^2 \pi$.

Der Bogen vom höchstgelegenen Punkt $t = {}^1/_2 \pi$ an im Uhrzeigersinn ist $s = {}^3/_2\, a \cos^2 t$; der Quadrantbogen hat die Länge $s_0 = {}^3/_2\, a$.

§ 99. Lemniskate. Cassinische Kurve.

1. Die **Lemniskate** (Fig. 37 ausgezogen) ist ein Spezialfall der Cassinischen Kurve. Ihre Gleichung ist

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$$

oder $r = a \sqrt{\cos 2\varphi}$.

Eigenschaften. Die Leitstrahlen $F_1 P = r_1$ und $F_2 P = r_2$ haben das konstante Produkt ${}^1/_2\, a^2$.

$$F_1 F_2 = a \sqrt{2}.$$

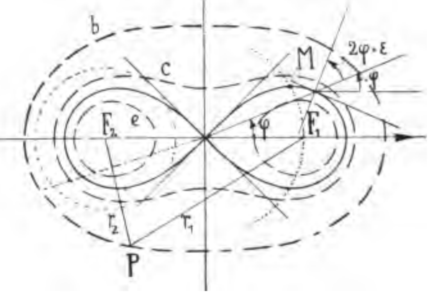


Fig. 37.

Der Kreis um den Ursprung durch F_1 schneidet die Lemniskate in Horizontalstellen M. Dort ist

$$\varphi = 30^0, \quad r = {}^1/_2\, a \sqrt{2}, \quad x = {}^1/_4\, a \sqrt{6}, \quad y = {}^1/_4\, a \sqrt{2}.$$

Richtung der Kurve. $\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{cotg} 2\varphi$; $\varepsilon = 2\varphi$.

Krümmungsradius $\varrho = \frac{a^2}{3r}$.

Der Krümmungsmittelpunkt ist gegeben durch

$$\xi = \frac{2a^2 \cos^3 \varphi}{3r}, \quad \eta = -\frac{2a^2 \sin^3 \varphi}{3r}.$$

Die Evolute hat die Gleichung

$$9\left(\xi^{2/3} + \eta^{2/3}\right)^2 \left(\xi^{2/3} - \eta^{2/3}\right) = 4a^2.$$

Die Fläche von $\varphi = 0$ an ist $F = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\varphi$.

Speziell ist der rechte (oder linke) Teil der Fläche $\frac{a^2}{2}$.

2. Die **Cassinische Kurve** Fig. 37 ist der geometrische Ort der Punkte, deren Leitstrahlen $F_1P = r_1$ und $F_2P = r_2$ ein konstantes Produkt $r_1 r_2 = b^2$ haben; dabei ist $F_1F_2 = a$.

Ihre Gleichung ist

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^4 - a^4$$

$$\text{oder } r = \sqrt{a^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{b^4 - a^4 \sin^2 2\varphi}}.$$

Spezialfälle sind (Typus b, c, d, e der Fig. 37).

a) der Kreis für $a = 0$,

b) ein Oval (ellipsenähnlich), wenn $b \geqq a\sqrt{2}$, Typus b,

c) Typus c, wenn $a < b < a\sqrt{2}$,

d) Lemniskate, wenn $a = b$, Typus d,

e) getrennte Kurvenäste, wenn $a > b$, Typus e.

§ 100. Descartessches Blatt. Vierblatt. Cissoide. Konchoide.

1. **Deskartessches Blatt.** Fig. 38.

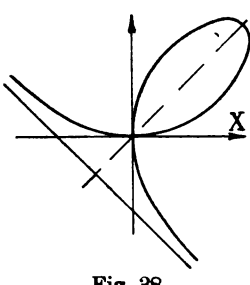


Fig. 38.
$a = 1$; Einheit 1 cm.

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

$$\text{oder } r = \frac{3a \sin\varphi \cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$$

Reelle Asymptote $x + y + a = 0$.

Fläche von $\varphi = 0$ an.

$$F = \frac{3a^2}{2(1 + \operatorname{tg}^3\varphi)}.$$

Speziell ist die Fläche der Schleife

$$F_0 = \frac{3}{2} a^2.$$

2. Vierblatt. Fig. 39.

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$$

oder $r = a \sin 2\varphi$.

Fig. 39.
$a = 2$; Einheit 1 cm.

3. **Cissoide** (des Diokles). Fig. 40. Der Radiusvektor von 0 aus schneidet die Gerade $x = 2a$ in S. Von S aus trägt man die durch den Kreis

$$(x - a)^2 + y^2 - a^2 = 0$$

erzeugte Sehne OA nach rückwärts ab, so daß $OA = SP$; dann ist P ein Punkt der Cissoide.

Ihre Gleichung ist

$$x = 2a \sin^2\varphi, \quad y = 2a \frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi};$$

oder $x^3 + y^2(x - 2a) = 0$;

oder $r = \dfrac{2a \sin^2\varphi}{\cos\varphi}$.

Die Asymptote $x - 2a = 0$ berührt den erzeugenden Kreis.

Die Fläche ROP ist

$$F = a^2 [3\varphi - \cos\varphi (2 \sin^3\varphi + 3 \sin\varphi)].$$

Die Gesamtfläche zwischen der Kurve und ihrer Asymptote ist $F = 3a^2\pi$.

Der Bogen OP ist

$$s = 2a \left[\frac{\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} - 2 - \sqrt{3} \lg \frac{\sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{1 + 3\cos^2\varphi}}{2 + \sqrt{3}}\right].$$

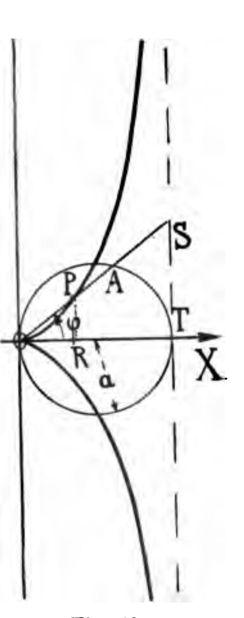


Fig. 40.
$a = 1$; Einheit 1 cm.

Die Cissoide ist der geometrische Ort der Fußpunkte der vom Scheitel der Parabel auf die Parabeltangenten gefällten Lote.

4. **Konchoide.** Fig. 41. Auf dem Radiusvektor von 0 aus trage man vom Schnittpunkt S mit der Geraden $x = b$ die

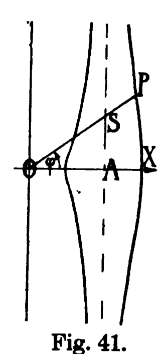


Fig. 41.
$a = {}^1/_2$, $b = 1$;
Einheit 1 cm.

konstante Strecke $SP = a$ ab. Der Endpunkt ist ein Punkt der Konchoide. Ihre Gleichung ist

$$r = \frac{b}{\cos\varphi} \pm a;$$

oder $x = b \pm a\cos\varphi, \quad y = b\,\mathrm{tg}\varphi \pm a\sin\varphi$;

oder $(x^2 + y^2)(x - b)^2 = a^2x^2$.

Der Nullpunkt ist Doppelpunkt der Konchoide (Isolierter Punkt, wenn $a < b$, Spitze, wenn $a = b$, gewöhnlicher Doppelpunkt, wenn $a > b$).

Die **allgemeine Konchoide** entsteht folgendermaßen: Von einem beliebig gewählten Anfangspunkt 0 aus ziehe man die Radienvektoren OS zu den Punkten S einer gegebenen Kurve und trage auf ihnen die konstante Strecke $SP = \pm a$ ab. Der Endpunkt P ist ein Punkt der verallgemeinerten Konchoide (Muschellinie).

§ 101. Spiralen.

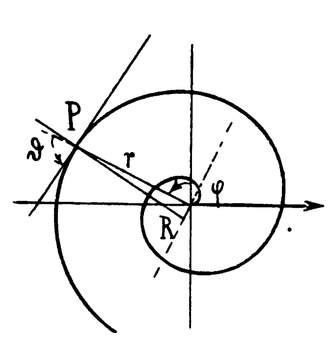


Fig. 42. $a = 0,2$; Einheit 1 cm.

1. **Archimedische Spirale** $r = a\varphi$, Fig. 42. Der Vektor OP dreht sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um den Ursprung. Auf diesem Vektor bewegt sich P mit gleichförmiger Geschwindigkeit nach außen.

Tangentenwinkel. $\mathrm{tg}\,\vartheta = \varphi$.

$T = r\sqrt{1 + \varphi^2}$.

$N = a\sqrt{1 + \varphi^2} = \sqrt{a^2 + r^2}$.

$S_t = \frac{r^2}{a} = a\varphi^2. \qquad S_n = a.$

Krümmungsradius $\varrho = \frac{(a^2 + r^2)^{3/2}}{2a^2 + r^2} = \frac{N^3}{N^2 + a^2}$.

Krümmungsmittelpunkt.

$$\xi = \frac{a[\varphi\cos\varphi - (1 + \varphi^2)\sin\varphi]}{2 + \varphi^2}, \quad \eta = \frac{a[\varphi\sin\varphi + (1 + \varphi^2)\cos\varphi]}{2 + \varphi^2}.$$

Die Fläche von $r = 0$ an ist $F = \frac{r^3}{6a}$.

Der Bogen von $\varphi = 0$ an ist

$$s = \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \lg(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})\right].$$

Angenähert ist (für viele Windungen) $s = \frac{a\varphi^2}{2}$.

2. **Hyperbolische Spirale** $r\varphi = a$. Fig 43. Konstruktion: Man zieht konzentrische Kreise um 0 und trägt auf jedem vom Anfangsstrahl aus den Bogen a ab.

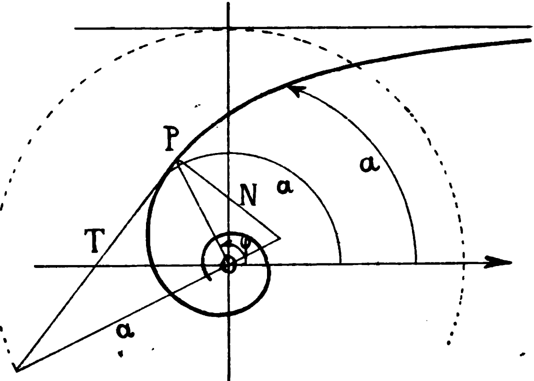


Fig. 43. $a = \pi$; Einheit 1 cm.

Punkt 0 ist ein asymptotischer Punkt der Spirale, dem sie sich mehr und mehr nähert.

Asymptote. Parallele zum Anfangsstrahl im Abstand a.

Tangentenwinkel. $\operatorname{tg}\vartheta = -\varphi$.

$$T = -\sqrt{a^2 + r^2}, \quad N = \frac{r}{a}\sqrt{a^2 + r^2},$$

$$S_t = -a, \qquad S_n = -\frac{r^2}{a}.$$

Krümmungsradius. $\varrho = \frac{r}{\sin^3\vartheta}$.

Fläche zwischen zwei Radienvektoren $F = \frac{a}{2}(r_1 - r_2)$.

Bogen zwischen zwei Radienvektoren

$$s = \sqrt{a^2 + r_1^2} - \sqrt{a^2 + r_2^2} + a \lg \frac{r_1\,(a + \sqrt{a^2 + r_2^2})}{r_2\,(a + \sqrt{a^2 + r_1^2})}.$$

3. **Logarithmische Spirale** $r = c e^{a\varphi}$, Fig. 44.

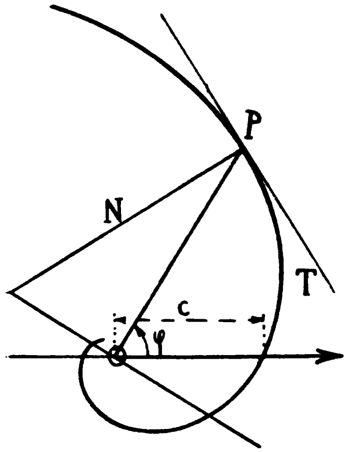


Fig 44.
$c = 2$, $a = 1/2$; Einheit 1 cm.

Der Pol ist asymptotischer Punkt.

Tangentenwinkel. $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{a}$.

$$T = \frac{r}{a}\sqrt{1 + a^2},$$

$$N = r\sqrt{1 + a^2} = \varrho.$$

$$S_t = \frac{r}{a}, \qquad S_n = ar.$$

Krümmungsradius ϱ = Polarnormale $= r\sqrt{1 + a^2}$.

Die Evolute der Spirale ist eine ihr kongruente logarithmische Spirale, gedreht um den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{\lg a}{a}$; ihre Gleichung ist

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -ar\sin\varphi = -ay \\ \eta &= ar\cos\varphi = ax \end{aligned}\right\}.$$

Fläche vom Pol ($\varphi = -\infty$) an. $F = \frac{r^2}{4a}$.

Bogen vom Pol an = Tangentenlänge $T = \frac{r\sqrt{1 + a^2}}{a}$.

4. **Parabolische Spirale** $r^2 = a^2\varphi$.

Tangentenwinkel. $\operatorname{tg}\vartheta = 2\varphi$.

$$T = a\sqrt{\varphi(1 + 4\varphi^2)}, \qquad N = \frac{a}{2}\sqrt{4\varphi + \varphi^{-1}}.$$

$$S_t = 2r\varphi, \qquad S_n = \frac{a^2}{2r}.$$

5. **Allgemeine Spirale** $r = a\varphi^n$.

Tangentenwinkel. $\operatorname{tg}\vartheta = \varphi : n$.

$$T = \frac{r}{n}\sqrt{n^2 + \varphi^2}, \qquad N = a\varphi^{n-1}\sqrt{n^2 + \varphi^2}.$$

$$S_t = \frac{a\varphi^{n+1}}{n}, \qquad S_n = na\varphi^{n-1}.$$

Krümmungsradius $\varrho = \frac{a\varphi^{n-1}(n^2+\varphi^2)^{3/2}}{n(n+1)+\varphi^2}$.

Krümmungs-mittelpunkt. $\begin{cases} \xi = \frac{n[r\cos\varphi - (n^2+\varphi^2)\,a\varphi^{n-1}\sin\varphi]}{n(n+1)+\varphi^2}, \\ \eta = \frac{n[r\sin\varphi + (n^2+\varphi^2)\,a\varphi^{n-1}\cos\varphi]}{n(n+1)+\varphi^2}. \end{cases}$

Fläche von $\varphi = 0$ an. $F = \frac{a^2\varphi^{2n+1}}{2(2n+1)}$.

VIII. Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung.

§ 102. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. **Absolute Wahrscheinlichkeit** dafür, daß ein oder mehrere erwartete Ereignisse E_1, E_2, ... E_n gleichzeitig oder vereinzelt in irgend einer bestimmten Weise eintreten, ist das Verhältnis der für die Erwartung günstigen Fälle zur Zahl n aller überhaupt möglichen Fälle. Speziell unterscheidet man einfache, relative, zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit usw.

2. Die **(einfache) Wahrscheinlichkeit** dafür, daß ein erwartetes Ereignis E eintritt, ist das Verhältnis der für das Eintreten günstigen Fälle (Treffer) zur Zahl aller überhaupt möglichen Fälle.

$$w = \frac{t}{n}.$$

3. w = 1 heißt, das Ereignis trifft sicher ein.
w = 0 heißt, das Ereignis trifft unmöglich ein.

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis nicht eintrifft, ist $w' = 1 - w$.

4. Die Wahrscheinlichkeit für das (gleichzeitige oder irgendwie bestimmte aufeinanderfolgende) Eintreten von mehreren erwarteten Ereignissen E_1, E_2, ... E_n ist, wenn w_1, w_2, ... w_n die einfachen Wahrscheinlichkeiten der voneinander unabhängigen Einzelereignisse sind,

$$w = w_1 w_2 \ldots . w_n.$$

5. Die Wahrscheinlichkeit, daß von mehreren erwarteten Ereignissen E_1 .... E_n irgend eines eintritt, ist

$$w = w_1 + w_2 + \cdots w_n.$$

6. Die Wahrscheinlichkeit, daß von zwei erwarteten Ereignissen E_1 und E_2, deren einfache Wahrscheinlichkeiten w_1 und w_2 sind,

a) E_1 und E_2 eintritt, ist $w = w_1 w_2$;

b) E_1 oder E_2 eintritt, ist $w = w_1 + w_2$;

c) E_1 eher als E_2 eintritt, ist $w = \frac{w_1}{w_1 + w_2}$;

d) E_1 m-mal und E_2 n-mal in bestimmter Reihenfolge eintritt, ist $w = w_1^m w_2^n$;

e) E_1 m-mal, E_2 n-mal, aber in beliebiger Reihenfolge eintritt, ist

$$w = \frac{(m+n)!}{m!n!} w_1^m w_2^n.$$

§ 103. **Beobachtungsfehler.**

1. Die Fehler, die bei einer Beobachtung mit einem bestimmten Beobachtungsapparat nach einer bestimmten Beobachtungsmethode gemacht werden können, sind

a) grobe Fehler: Versehen beim Ablesen usw.;

b) konstante Fehler: Apparatfehler und Methodenfehler; sie erfolgen immer im gleichen Sinn;

c) rein zufällige Beobachtungsfehler, die eigentlichen „Beobachtungsfehler“, auf die sich die nachstehenden Formeln beziehen; sie erfolgen ebensogut im positiven, wie im negativen Sinn.

2. Ein **Beobachtungsfehler** ist das Resultat einer unbeschränkt großen Anzahl von positiven oder negativen sehr kleinen zufälligen Einzelfehlern, herrührend von den mehr oder minder unvollkommenen Apparaten und Beobachtungsmethoden.

3. Den wahren Wert x einer zu beobachtenden Größe kann man praktisch nie erfahren. Die verschieden oft ausgeführten Beobachtungen ergeben nur Annäherungswerte. Als Annäherungswerte nimmt man Mittelwerte aus den beobachteten Werten (siehe § 13).

4. **Gausssches Axiom.** Hat man eine gesuchte Größe n-mal unter gleichgünstigen Bedingungen gemessen, so ist der wahrscheinlichste Wert der beobachteten Größe x das arithme-

tische Mittel der Einzelbeobachtungen. Sind diese Einzelbeobachtungen a_1, $a_2 \cdots a_n$, so ist der **wahrscheinlichste Wert** b' der gesuchten Größe

$$b' = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{\sum a}{n}.$$

Man unterscheide bei der beobachteten Größe: wahrer Wert x, wahrscheinlicher Wert b', beobachtete Werte oder Beobachtungsergebnisse a_1, a_2 . . . .

5. **Eigenschaft des arithmetischen Mittels** (oder des wahrscheinlichen Wertes). Die Summe der Quadrate der Abweichungen ist ein Minimum; d. h. wenn v'_1, $v'_2 \cdots v'_n$ die Abweichungen der beobachteten Werte a_1, $a_2 \cdots a_n$ vom Mittelwert b' sind, so ist die Quadratsumme dieser Abweichungen kleiner als die Quadratsumme der Abweichungen von irgend einer anderen Zahl.

$$v'^2_1 + v'^2_2 + \cdots + v'^2_n = \sum v'^2 = \text{Minimum}.$$

6. Scheinbare Abweichungen oder **scheinbare** Beobachtungsfehler v'_1, $v'_2 \cdots$ sind die Abweichungen vom Mittelwert der Beobachtung.

7. Als Mittelwerte der **wahren** Beobachtungsfehler v_1, v_2, . . . sind definiert (die Beobachtungen sind alle als gleich genau vorausgesetzt):

a) **Durchschnittlicher Fehler d** von n Beobachtungen ist das arithmetische Mittel der einzelnen Beobachtungsfehler.

$$d = \frac{\sum v}{n} = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n}.$$

b) **Mittlerer Fehler m** von n Beobachtungen ist die Wurzel aus dem arithmetischen Mittel der Quadrate der einzelnen Beobachtungsfehler.

$$m = \pm \sqrt{\frac{\sum v^2}{n}} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}{n}}.$$

Der mittlere Fehler m von n Beobachtungen ist

$$m = \pm \sqrt{\frac{\sum v'^2}{n - 1}},$$

wenn v' die scheinbaren Beobachtungsfehler.

c) **Wahrscheinlicher Fehler w** von n Beobachtungen ist derjenige Fehler, der von den (absolut genommenen) einzelnen Beobachtungsfehlern ebenso oft überschritten wie unterschritten wird.

Wie alle Mittelwerte weichen die drei eben definierten Fehler wenig von einander ab (siehe 12).

8. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines positiven wie negativen Beobachtungsfehlers ist gleich groß. Am größten ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten sehr kleiner Beobachtungsfehler. Bei einer hinreichend großen Zahl von Beobachtungen konvergiert die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Beobachtungsfehlers 0 gegen 1.

Am kleinsten ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten großer Beobachtungsfehler.

9. Die **Wahrscheinlichkeitskurve** hat als Ordinate für ein bestimmtes x

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 h^2}.$$

Fig. 45.

h ist die Genauigkeitsziffer; sie ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen.

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines zwischen x und x + dx liegenden Beobachtungsfehlers ist gegeben durch y dx. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Beobachtungsfehlers zwischen den Grenzen x_1 und x_2 ist gegeben durch

$$W_{x_1}^{x_2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2 h^2} dx,$$

d. i. durch die Fläche der Wahrscheinlichkeitskurve zwischen den Werten x_1 und x_2. (Natürlich muß die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Beobachtungsfehlers zwischen $-\infty$ und $+\infty$ bei einer beliebigen Zahl von Beobachtungen 1 sein, d. h. die Fläche zwischen der Kurve und der x-Axe ist 1.)

Die x-Axe ist Asymptote. Je größer h, desto größer

$= \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, desto eher schmiegt sich die Kurve der x-Axe an.

Wendepunkt: für $x = \frac{1}{h\sqrt{2}}$, $y = 0{,}6065 \frac{h}{\sqrt{\pi}}$.

10. Bei unendlich viel Beobachtungen treten die Fehler in einem gegebenen Intervall in einer Anzahl auf, die proportional der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens in diesem Intervall ist. Die Anzahl der zwischen x und $x + dx$ auftretenden Fehler ist daher $\varrho y dx$ und die Summe aller Beobachtungsfehler in diesem Intervall $\varrho y dx \cdot x$. ϱ ist Proportionalitätsfaktor.

11. Der durchschnittliche Fehler aller Beobachtungen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ ist

$$d = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{0{,}564\,190}{h}.$$

Der mittlere Fehler in diesem Intervall ist

$$m = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{0{,}707\,107}{h}.$$

Der wahrscheinliche Fehler im gleichen Intervall ist

$$w = \frac{0{,}476\,936}{h}.$$

12. Auf den mittleren Fehler bezogen ist

$$d = 0{,}797\,885\,m;$$
$$w = 0{,}674\,490\,m.$$

Der mittlere Fehler fällt immer am größten, der wahrscheinliche am kleinsten aus.

13. Die Schreibweise $v = rd$, bezw. $v = rm$ oder $v = rw$ stellt den wahren Beobachtungsfehler als ein bestimmtes Vielfaches des durchschnittlichen, bezw. mittleren oder wahrscheinlichen Fehlers dar. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler rd, bezw. rm, rw vorkommt, ist bezw.

$$W_{rd} = \frac{1}{d\pi} \cdot e^{-\frac{r^2}{\pi}};$$

$$W_{rm} = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{r^2}{2}};$$

$$W_{rw} = \frac{c}{w\sqrt{\pi}} e^{-c^2 r^2}, \cdots c = 0{,}476\,936.$$

14. Die Konstruktion der Wahrscheinlichkeitskurve für W_{rm}, r als Abszisse gewählt, ergibt für $r = 5$ eine Ordinate, sehr wenig von 0 verschieden; d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß ein einzelner Beobachtungsfehler größer als das 5-fache des mittleren Fehlers auftritt, ist sehr klein.

Bei einer hinreichend großen Anzahl von Beobachtungen geben die Formeln für W_{rm} direkt die Verteilung der Fehlergrößen in der Gesamtzahl der Fehler.

Daß nämlich der r-fache mittlere Fehler überschritten wird, kommt wahrscheinlich einmal vor bei je

	3,1	22	368	2150	15 800	1 750 000 Fehlern
für $r =$	1,0	2,0	3,0	3,5	4,0	5,0 .

Beobachtungsfehler also, die das 3,0- bis 3,5-fache des mittleren Fehlers überschreiten, dürfen nur unter ganz bestimmten Umständen angenommen werden.

15. Die algebraische Summe der Fehler $v_1, v_2 \cdots$ muß 0 sein; trifft dieser Satz nicht zu, so läßt das auf einen konstanten Fehler (siehe 1) schließen.

§ 104. Ausgleich direkter Beobachtungen.

1. **Fortpflanzung der Beobachtungsfehler.** Ist die nur aus den Beobachtungsergebnissen $x, y, z \cdots$ zu berechnende Funktion $F = F(x, y, z \cdots)$, so ergibt sich unter der Voraussetzung, daß die mittleren Fehler der Beobachtungsergebnisse $x, y, z \cdots$ bei gleichgenauer Beobachtung $m_x, m_y \cdots$ sind, der mittlere Fehler der Funktion F zu

$$M = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} m_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} m_y\right)^2 + \cdots}.$$

1a. Ist speziell $F = ax$, so ist bei Annahme des mittleren Fehlers m für das Beobachtungsergebnis x

$$M = \pm\, am.$$

1b. Ist speziell $F = x \pm y \pm \cdots$, so wird

$$M = \pm \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + \cdots}.$$

Sind die mittleren Fehler $m_x, m_y \cdots$ der Beobachtungsergebnisse gleich, so wird für n Beobachtungsergebnisse

$$M = \pm m \sqrt{n}.$$

1c. Ist speziell $F = ax + by + \cdots$, so wird

$$M = \pm \sqrt{(a m_x)^2 + (b m_y)^2 + \cdots}$$

und bei Voraussetzung gleicher mittlerer Fehler m der Beobachtungsergebnisse

$$M = \pm m \sqrt{a^2 + b^2 + \cdots}.$$

2. Das **Gewicht** einer Beobachtung soll die Genauigkeit der Beobachtung und der daraus berechneten Funktionen zum Ausdruck bringen; es ist ein Maß für die Genauigkeit der Beobachtung, also eine Verhältniszahl. Denkt man sich ein Beobachtungsergebnis entstanden als Mittelwert von n gleichgenauen Beobachtungen, so ist der mittlere Fehler m dieses Beobachtungsergebnisses $m = \sqrt{\frac{c}{n}}$ (c Konstante), und das Gewicht p proportional zur Zahl n der Beobachtungen definiert, also

$$p = \frac{k}{m^2} = \frac{\text{Konstante}}{\text{Quadrat des mittleren Fehlers}}.$$

Die Wahl der im allgemeinen beliebig angenommenen Konstanten k ist durch die Forderung möglichst einfacher Zahlenrechnungen oder durch Festsetzung einer Einheit von p bestimmt.

3. **Fortpflanzung des Gewichtes.** Ist die aus den Beobachtungsergebnissen $x, y, z \cdots$ zu berechnende Funktion $F = F(x, y, z \cdots)$, so ergibt sich unter der Voraussetzung der Gewichte $p_x, p_y \cdots$ der Beobachtungsergebnisse x bezw. $y \cdots$ das Gewicht P der Funktion F durch

$$\frac{1}{P} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{p_x} + \left(\frac{d F}{d y}\right)^2 \frac{1}{p_y} + \cdots.$$

3a. Ist speziell $F = ax$, so wird

$$P = \frac{p_x}{a^2}.$$

3b. Ist speziell $F = ax + by + cz + \cdots$, so wird

$$P = \frac{1}{a^2/p_x + b^2/p_y + c^2/p_z + \cdots}.$$

4. **Ausgleich direkter gleichgenauer Beobachtungen.** Sind die n Beobachtungswerte $a_1, a_2 \cdots$ der Größe F von gleicher Güte, so ist der wahrscheinlichste Wert a der beobachteten Größe F

$$a = \frac{\sum a}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

$$\text{Kontrolle: } \sum v = 0,$$

wenn $v_1 = a - a_1$, $v_2 = a - a_2 \cdots$ die einzelnen Beobachtungsfehler sind.

$$M = \pm\sqrt{\frac{\sum v^2}{n(n-1)}}.$$

5. **Ausgleich direkter ungleichgenauer Beobachtungen.** Die n Beobachtungswerte $a_1, a_2 \cdots$ der Größe F sind von ungleicher Güte; die Mittelwerte der Einzelbeobachtungen und die Gewichte sind bezw. $m_1, m_2 \cdots$, $p_1, p_2 \cdots$. Der wahrscheinlichste Wert a von F ist das „allgemeine arithmethische Mittel“

$$a = \frac{\sum ap}{\sum p} = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots}{p_1 + p_2 + \cdots}.$$

$$\text{Kontrolle: } \sum pv = 0,$$

wenn $v_1 = a - a_1$, $v_2 = a - a_2 \cdots$ die einzelnen Beobachtungsfehler sind.

$$P = \sum p; \quad M = \pm\sqrt{\frac{\sum pv^2}{(n-1)\sum p}}; \quad m_i = \pm\sqrt{\frac{\sum pv^2}{(n-1)p_i}}.$$

§ 105.

Ausgleich vermittelnder und bedingter Beobachtungen.

1. **Vermittelnde Beobachtung.** Angenommen: Zur Auswertung der gesuchten Größe x (oder mehrerer Größen) führt nicht die direkte Beobachtung, sondern die Auflösung von Gleichungen, in denen die Beobachtungswerte als Konstante enthalten sind. Diejenigen Beobachtungsgrößen u_i, die die Auswertung der Gleichungen ermöglichen, heißen die vermittelnden Beobachtungen.

2. Zur Auswertung der k unbekannten Größen x, y···· hat man mindestens k Gleichungen notwendig. Die aus ihnen berechneten Werte werden nur zufällig die wahren Werte x, y···· oder ihnen recht nahe kommende Näherungswerte liefern. Der Genauigkeitsgrad läßt sich durch Ausführung „überschüssiger" Beobachtungen steigern; man stellt daher

$$\text{n Beobachtungsgleichungen} \begin{cases} u_1 = F_1(x, y, z \cdots\cdot), \\ u_2 = F_2(x, y, z \cdots\cdot), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_n = F_n(x, y, z \cdots\cdot). \end{cases}$$

auf, also n — k überschüssige. Dabei sind die u_i die zu beobachtenden n Größen.

Bezeichnet man die wahrscheinlichsten Werte derselben mit u'_i, die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler mit v_i (Widersprüche oder Verbesserungen der Beobachtungsergebnisse), so daß also $v_i = u'_i - u_i$, so ergeben sich die wahrscheinlichsten Werte der gesuchten Größen x, y, z···· durch die Bedingung, daß

$$\sum p v^2 = \text{Minimum}.$$

3. Sind speziell die

$$\text{n Beobachtungsgleichungen} \begin{cases} u_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots\cdot, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_n = a_n x + b_n y + c_n z + \cdots\cdot, \end{cases}$$

so ermittelt man nach der Minimumbedingung die k Unbekannten x, y, z···· aus den

k End- oder Normal- gleichungen
$$\begin{cases} x\sum pa^2 + y\sum pab + z\sum pac + \cdots = \sum pau', \\ x\sum pba + y\sum pb^2 + z\sum pbc + \cdots = \sum pbu', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$\text{Kontrolle: } \sum pva = 0, \quad \sum pvb = 0, \cdots$$

$$m_i = \pm\sqrt{\frac{\sum pv^2}{p_i(n-k)}}.$$

4. Wurden die einzelnen Beobachtungsgrößen u_i gleichgenau beobachtet, so sind alle p gleich 1 zu setzen.

5. **Bedingte Beobachtung.** Die n beobachteten Größen $x, y \cdots$ sind noch durch andere von einander unabhängige Relationen in Form von $(k < n)$

k Bedingungsgleichungen
$$\begin{cases} F_1(x, y, z \cdots) = 0, \\ F_2(x, y, z \cdots) = 0, \\ \cdots\cdots \\ F_k(x, y, z \cdots) = 0, \end{cases}$$

gegenseitig abhängig gemacht; man nennt solche Beobachtungen *bedingte*. Die beobachteten Größen sollen nun so ausgeglichen werden, daß durch sie die Bedingungsgleichungen erfüllt werden, ebenso die Minimumsbedingung. Die Einsetzung der beobachteten Werte $x', y', z' \cdots$ in die k Bedingungsgleichungen gibt die

k Widersprüche
$$\begin{cases} w_1 = F_1(x', y', z' \cdots), \\ w_2 = F_2(x', y', z' \cdots), \\ \cdots\cdots \\ w_k = F_k(x', y', z' \cdots). \end{cases}$$

Die Beobachtungsfehler sind

$$v_1 = x - x', \quad v_2 = y - y', \cdots$$

Die Bedingung $\sum pv^2 = \text{Minimum}$ gibt im Verein mit den Widerspruchsgleichungen Anlaß zur Aufstellung von $n + k$ Gleichungen, aus denen man die n Beobachtungsfehler v_i, sowie die k neu eingeführten Hilfsunbekannten ϱ_i ermitteln kann. Wenn man mit

$$a_1, a_2, a_3 \cdots \text{ bezeichnet bezw. } \frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{dy}, \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdots,$$

mit $b_1, b_2 \cdots$ entsprechend $\frac{\partial F_2}{dx}$, $\frac{\partial F_2}{dy} \cdots$ etc., so sind diese Gleichungen die

n Korrelatengleichungen für die v_i

$$\begin{cases} p_1 v_1 = \varrho_1 a_1 + \varrho_2 b_1 + \varrho_3 c_1 + \cdots, \\ p_2 v_2 = \varrho_1 a_2 + \varrho_2 b_2 + \varrho_3 c_2 + \cdots, \\ p_3 v_3 = \varrho_1 a_3 + \varrho_2 b_3 + \varrho_3 c_3 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

und die

k Normalgleichungen für die ϱ_i

$$\begin{cases} 0 = w_1 + \varrho_1 \sum \frac{a^2}{p} + \varrho_2 \sum \frac{ab}{p} + \cdots, \\ 0 = w_2 + \varrho_1 \sum \frac{ba}{p} + \varrho_2 \sum \frac{b^2}{p} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Kontrolle: $\sum pv^2 + \sum w\varrho = 0.$

$$m_i = \pm \sqrt{\frac{\sum pv^2}{k p_i}}.$$

IX. Elemente der analytischen Geometrie des Raumes.

§ 106. Raumkoordinaten.

1. Der Winkel von zwei windschiefen Geraden ist der, den zwei zu ihnen Parallele durch einen beliebigen Punkt bilden.

2. Die **Projektion einer Strecke** auf eine Ebene oder Gerade (auch windschiefe) ist gleich dem Produkt aus Originalstrecke mal Kosinus Neigungswinkel.

3. Die Projektion eines geschlossenen Polygons auf eine Gerade ist Null (wenn man den Richtungssinn durch Einführung der Vorzeichen festsetzt; siehe Vektoren).

4. Die Projektion eines ebenen Flächenstückes auf eine andere Ebene ist gleich dem Produkt aus Originalfläche mal Kosinus Neigungswinkel.

5. Zwei Ebenen α und β schließen den gleichen Winkel ein, wie zwei zu ihnen senkrechte Gerade a und b.

6. Ein Punkt im Raum hat drei Freiheitsgrade, d. h. durch drei Zahlen ist seine jeweilige Lage fixiert. Diese drei Zahlen nennt man seine Koordinaten.

7. Das in Fig. 46 dargestellte rechtwinklige Koordinatensystem ist ein **Rechtssystem,** d. h. eine Drehung um die z-Axe von der x- nach der y-Axe und eine gleichzeitige Translation in Richtung der positiven z-Axe ist eine Rechtsdrehung. (Rechtsgängige Schraube.)

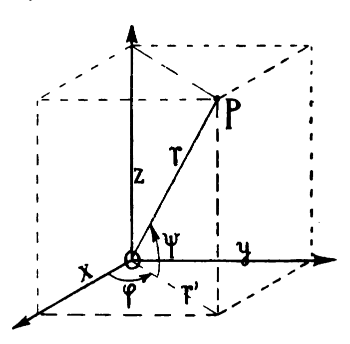


Fig. 46.

8. **Rechtwinklige Koordinaten** des Punktes P sind die Wege vom Anfangspunkt 0 aus nach P

in Richtung der Koordinatenaxen. Oder: rechtwinklige Koordinaten des Punktes P sind die Projektionen des Radiusvektor r auf die drei Axen. (Dem Radiusvektor ist die Richtung von 0 nach P zuzuschreiben).

9. **Zylinderkoordinaten** eines Punktes sind die Zahlen ϱ, φ, z; ϱ ist der Abstand des Punktes von der z-Axe, φ und z haben die ursprüngliche Bedeutung (siehe Fig. 46).

Zusammenhang zwischen rechtwinkligen und Zylinderkoordinaten.

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi .$$

10. **Sphärische Koordinaten** eines Punktes sind die aus Fig. 46 zu entnehmenden Zahlen r, φ, ψ. φ ist die (geographische) Länge, ψ die (geographische) Breite. Die y-Ebene bildet den Anfangsmeridian, die z-Ebene den Äquator.

Zusammenhang zwischen den rechtwinkligen und sphärischen Koordinaten.

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi;$$

und $$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

11. Eine durch einen festen Punkt im Raum gehende Gerade bezw. Ebene hat zwei Freiheitsgrade, d. h. durch zwei Zahlen ist ihre jeweilige Lage bestimmt. Die zwei Zahlen nennt man die Koordinaten der Geraden bezw. Ebene [für eine Geometrie „im Punkt"].

12. **Richtungswinkel einer Geraden** nennt man die Winkel, die sie mit den Koordinatenaxen bildet (zu zählen von den Axen aus).

13. **Richtungswinkel einer Ebene** nennt man die Winkel, die sie mit den Koordinatenebenen bildet (zu zählen von den Ebenen aus).

14. **Richtungsfaktoren** oder **Richtungswerte** einer Geraden oder Ebene nennt man die Kosinusfunktionen der Richtungswinkel. Der kürzeren Darstellung halber schreibt man oft α statt $\cos \alpha$, β statt $\cos \beta$ usw.

15. Eine Gerade und eine zu ihr senkrechte Ebene haben gleiche Richtungswinkel, daher auch gleiche Richtungsfaktoren.

16. Wenn der Radiusvektor $r = OP$ die Richtungsfaktoren $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ hat, dann sind die Koordinaten von P:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma.$$

17. Zwischen den Richtungsfaktoren $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ einer Strecke oder einer Geraden oder einer Ebene im Raum besteht die Beziehung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

18. Eine Ebene enthält die Richtung $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ heißt, sie ist zu einer Geraden mit diesen Richtungsfaktoren parallel.

19. Die Projektionen der Strecke P_1P_2 auf die Koordinatenaxen sind

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1.$$

20. Die **Entfernung** R der Punkte P_1P_2 ist

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

21. Die Richtungsfaktoren $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ der Strecke P_1P_2 sind bestimmt durch

$$X = R\cos\alpha, \quad Y = R\cos\beta, \quad Z = R\cos\gamma.$$

22. Der Winkel ϑ zweier Geraden (oder zweier Ebenen) mit den Richtungsfaktoren $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ bezw. $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$ ist bestimmt durch

$$\cos\vartheta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2,$$

oder $$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)^2 + (\cos\beta_2 - \cos\beta_1)^2 + (\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1)^2}.$$

Stehen die beiden Geraden bezw. die beiden Ebenen auf einander senkrecht, so gilt

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0.$$

Sind die beiden Geraden, bezw. die beiden Ebenen parallel, so gilt

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2, \quad \cos\beta_1 = \cos\beta_2, \quad \cos\gamma_1 = \cos\gamma_2.$$

23. Ein Punkt P auf der Strecke P_1P_2 teilt die Strecke P_1P_2. Das **Teilungsverhältnis** λ ist definiert durch $\lambda = PP_1 : PP_2$. (λ ist negativ für einen innern Teilungspunkt, positiv für einen

äußern zu nehmen.) Wenn gegeben neben den Koordinaten von P_1 und P_2 auch noch P, dann ist

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Ist neben P_1 und P_2 noch λ gegeben, dann bestimmen sich die Koordinaten des Teilpunktes P durch

$$x = \frac{\lambda x_2 - x_1}{\lambda - 1}, \quad y = \frac{\lambda y_2 - y_1}{\lambda - 1}, \quad z = \frac{\lambda z_2 - z_1}{\lambda - 1}.$$

24. Die Koordinaten des **Mittelpunktes einer Strecke** P_1P_2 sind das arithmetische Mittel der Koordinaten der Endpunkte.

25. Die Koordinaten des **Schwerpunktes eines Dreiecks** sind das arithmetische Mittel der Koordinaten der Eckpunkte.

26. Die Koordinaten ξ, η, ζ des **Schwerpunktes S** eines **Systems von Massenpunkten** $m_1, m_2 \cdots$ mit den Koordinaten $x_1|y_1|z_1$ bezw. $x_2|y_2|z_2 \cdots$ sind bestimmt durch

$$M\xi = \sum mx; \quad M\eta = \sum my; \quad M\zeta = \sum mz,$$

wenn $M = \sum m$ die Gesamtmasse.

27. Das Quadrat eines ebenen Flächenstückes ist gleich der Summe der Quadrate der Projektionen auf drei zu einander senkrechte Ebenen.

$$F^2 = F_1{}^2 + F_2{}^2 + F_3{}^2.$$

28. Der Inhalt des **Tetraeders** $OP_1P_2P_3$ ist

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

29. Der Inhalt des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ ist

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

§ 107. Koordinatentransformation.

1. Den Übergang von rechtwinkligen zu sphärischen Koordinaten und umgekehrt siehe § 106, 10.

2. **Parallelverschiebung.** Sind x, y, z die alten Koordinaten, x', y', z' die neuen und $P_0 = x_0 | y_0 | z_0$ der neue Ursprung, so ist

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0.$$

3. **Drehung.** Die Axen OX', OY', OZ' des neuen rechtwinkligen Systems bilden mit den alten Axen OX, OY, OZ Winkel, deren Kosinus gegeben sind durch das Schema (abkürzende Bezeichnung α statt $\cos\alpha$ usw.)

	x	y	z
x'	α_1	β_1	γ_1
y'	α_2	β_2	γ_2
z'	α_3	β_3	γ_3

Dann gibt dieses Schema direkt den Zusammenhang zwischen beiden Koordinatensystemen.

$$x' = x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1, \quad x = x'\alpha_1 + y'\alpha_2 + z'\alpha_3,$$
$$y' = x\alpha_2 + y\beta_2 + z\gamma_2, \quad y = x'\beta_1 + y'\beta_2 + z'\beta_3,$$
$$z' = x\alpha_3 + y\beta_3 + z\gamma_3. \quad z = x'\gamma_1 + y'\gamma_2 + z'\gamma_3.$$

Ferner bestehen die Beziehungen

$$\text{a)}\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \quad \text{b)}\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1,$$
$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1,$$
$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

$$\text{c)}\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0, \quad \text{d)}\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0,$$
$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0, \quad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0,$$
$$\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0. \quad \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0.$$

4. Drehung und Parallelverschiebung. Superposition der Formeln 2 und 3.

§ 108. Ebene.

1. Als x-Ebene oder y-z-Ebene sei bezeichnet die Ebene durch die y- und z-Axe; entspr. y- und z-Ebene.

2. Gleichung der x- bezw. y- und z-Ebene.

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0.$$

3. Gleichung einer Parallelebene zur x- bezw. y- und z-Ebene.

$$x = a; \qquad y = b; \qquad z = c.$$

4. Gleichung einer Ebene durch die x- bezw. y- und z-Axe.

$$By + Cz = 0; \quad Ax + Cz = 0; \quad Ax + By = 0.$$

5. Gleichung einer Ebene parallel zur x- bezw. y- und z-Axe.

$$By + Cz + D = 0; \quad Ax + Cz + D = 0; \quad Ax + By + D = 0.$$

6. Ebene durch den Ursprung.

$$Ax + By + Cz = 0.$$

7. **Ebene durch drei gegebene Punkte** $P_1 = x_1|y_1|z_1$, $P_2 = x_2|y_2|z_2$ und $P_3 = x_3|y_3|z_3$.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

8. **Abschnittsgleichung.** Die Ebene schneidet auf den Axen gegebene Stücke a, b, c ab.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

9. **Normalgleichung.** Die Ebene soll vom Nullpunkt den Abstand p und die Richtungswerte $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ haben.

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sind natürlich auch die Richtungswerte des Lotes p.

10. **Ebene durch den Punkt P_0 mit vorgeschriebenen Richtungswinkeln** α, β, γ.

$$(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\cos\beta + (z - z_0)\cos\gamma = 0.$$

11. **Allgemeine Ebenengleichung.**

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Die Koeffizienten von x, y, z sind proportional den Richtungswerten der Ebene, so daß diese bestimmt sind aus

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma : 1 = A : B : C : \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2};$$

oder $$\cos\alpha = \varrho A, \quad \cos\beta = \varrho B, \quad \cos\gamma = \varrho C,$$

$$\varrho = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist entgegengesetzt dem von D.

12. E ist ein Symbol, eine Abkürzung für $Ax + By + Cz + D$; also ist $E = 0$ die allgemeine Ebenengleichung. Ebenso ist N ein Symbol für $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p$, also $N = 0$ die Normalgleichung der Ebene.

13. Schnittpunkt P_0 dreier Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$.

$$\left.\begin{aligned} E_1 &\equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \\ E_2 &\equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \\ E_3 &\equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

$$x_0 : y_0 : z_0 : 1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}.$$

14. Vier Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$, $E_4 = 0$ schneiden sich in einem Punkt, wenn die Determinante ihrer Gleichungen verschwindet.

15. **(Neigungs)winkel ϑ zweier Ebenen** $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$.

$$\cos\vartheta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}};$$

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{(A_1B_2 - A_2B_1)^2 + (B_1C_2 - B_2C_1)^2 + (C_1A_2 - C_2A_1)^2}{(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2)^2}.$$

$E_1 = 0$ **parallel** zu $E_2 = 0$, wenn $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$ oder

$$A_2 = \varrho A_1, \quad B_2 = \varrho B_1, \quad C_2 = \varrho C_1.$$

Die Gleichungen paralleler Ebenen unterscheiden sich nur durch den konstanten Summanden.

$E_1 = 0$ **senkrecht** zu $E_2 = 0$, wenn $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

16. **Entfernung d des Punktes** P_0

a) von der Ebene $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$.

$$d = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p;$$

b) von der Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

17. Das **Ebenenbüschel** durch die Schnittgerade der Ebene $E_1 = 0$ mit der Ebene $E_2 = 0$ ist

$$E_1 - \lambda E_2 = 0.$$

Sind die beiden Ebenen in der Normalform $N_1 = 0$ bezw. $N_2 = 0$ gegeben, so stellt der Parameter λ in der Büschelgleichung $N_1 - \lambda N_2 = 0$ das Verhältnis der Abstände eines beliebigen Punktes der variablen Ebene von den beiden Grundebenen $N_1 = 0$ und $N_2 = 0$ dar.

18. **Winkelhalbierende Ebene** der beiden (in der Normalform gegebenen) Ebenen $N_1 = 0$ und $N_2 = 0$.

$$N_1 \pm N_2 = 0.$$

19. Haben drei Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ die nämliche Gerade gemeinsam, so müssen sich immer drei Zahlen λ_1, λ_2, λ_3 so finden lassen, daß

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = 0.$$

§ 109. Gerade.

1. **Allgemeinste Gleichung einer Geraden.**

$$\left.\begin{matrix} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \text{d. i.} \quad \left\{\begin{matrix} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{matrix}\right.$$

Eliminiert man aus einer Gleichung y, aus der andern z, so hat man die gebräuchliche Darstellung

$$\left.\begin{matrix} y = mx + b \\ z = nx + c \end{matrix}\right\}.$$

$$\left.\begin{matrix} y = mx + b \\ z = 0 \end{matrix}\right\} \text{Grundriß}, \qquad \left.\begin{matrix} z = nx + c \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \text{Seitenriß}.$$

Eliminiert man aber aus der einen Gleichung x, aus der andern y, so ist eine andere gebräuchliche Darstellung

$$\left.\begin{matrix} x = \varrho z + r \\ y = \sigma z + s \end{matrix}\right\}.$$

Die Gerade hat im Raum vier Freiheitsgrade.

2. Die Gleichungen der x- bezw. y- und z-Axe sind

$$\left.\begin{matrix} y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{bezw.} \quad \left.\begin{matrix} z = 0 \\ x = 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}.$$

3. Die Geraden parallel zur x- bezw. y- und z-Axe sind

$$\left.\begin{array}{l} y = b \\ z = c \end{array}\right\} \text{ bezw. } \left.\begin{array}{l} z = c \\ x = a \end{array}\right\} \text{ und } \left.\begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array}\right\}.$$

4. Die Geraden parallel zur x- bezw. y- und z-Ebene sind

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ E = 0 \end{array}\right\} \text{ bezw. } \left.\begin{array}{l} y = b \\ E = 0 \end{array}\right\} \text{ und } \left.\begin{array}{l} z = c \\ E = 0 \end{array}\right\}.$$

5. Eine **Gerade durch den Ursprung** hat die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0 \end{array}\right\}, \text{ vereinfacht } \left.\begin{array}{l} y = mx \\ z = nx \end{array}\right\}.$$

6. Die **Richtungsfaktoren der Geraden**

$$\left.\begin{array}{l} E_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ E_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{array}\right\} \text{ sind}$$

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \left| \begin{array}{ccc} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{array} \right|$$

$$= (B_1 C_2 - B_2 C_1) : (C_1 A_2 - C_2 A_1) : (A_1 B_2 - A_2 B_1).$$

Ist speziell die Gerade dargestellt durch

$$\left.\begin{array}{l} y = mx + b \\ z = nx + c \end{array}\right\}, \text{ so ist}$$

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma : 1 = 1 : m : n : \sqrt{1 + m^2 + n^2};$$

und bei der Darstellung

$$\left.\begin{array}{l} x = \varrho z + r \\ y = \sigma z + s \end{array}\right\} \text{ ist}$$

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma : 1 = \varrho : \sigma : 1 : \sqrt{\varrho^2 + \sigma^2 + 1}.$$

7. **Gerade durch zwei gegebene Punkte** P_1 und P_2.

$$x = \frac{\lambda x_2 - x_1}{\lambda - 1}, \quad y = \frac{\lambda y_2 - y_1}{\lambda - 1}, \quad z = \frac{\lambda z_2 - z_1}{\lambda - 1}$$

(Parameterdarstellung durch λ);

$$\text{oder } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

8. **Gerade durch Punkt P_0 mit vorgeschriebener Richtung.**

$$x = x_0 + \lambda \cos\alpha, \quad y = y_0 + \lambda \cos\beta, \quad z = z_0 + \lambda \cos\gamma$$

(Parameterdarstellung durch λ);

oder $\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}$.

9. Die beiden Geraden $\left.\begin{matrix} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ und $\left.\begin{matrix} E_3 = 0 \\ E_4 = 0 \end{matrix}\right\}$ schneiden sich, wenn die Determinante der vier Gleichungen $E_i = 0$ verschwindet.

Die beiden Geraden

$$\left.\begin{matrix} y = mx + b \\ z = nx + c \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} y = m'x + b' \\ z = n'x + c' \end{matrix}\right\}$$

schneiden sich, wenn

$$(m - m')(c - c') = (n - n')(b - b').$$

10. **Winkel zweier Geraden.** Nach 6 ermittelt man die Richtungsfaktoren $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ bezw. $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$ beider Geraden. Dann ist

$$\cos\vartheta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 .$$

Speziell ist der Winkel ϑ der beiden Geraden

$$\left.\begin{matrix} y = mx + b \\ z = nx + c \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} y = m'x + b' \\ z = n'x + c' \end{matrix}\right\}$$

bestimmt durch

$$\cos\vartheta = \frac{mm' + nn' + 1}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}\,\sqrt{m'^2 + n'^2 + 1}}.$$

Diese beiden Geraden sind **parallel,** wenn $m = m'$, $n = n'$; sie sind **senkrecht,** wenn $mm' + nn' + 1 = 0$.

11. Die **Parallele** zur Geraden

$$\left.\begin{matrix} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{matrix}\right\} \text{ ist } \left.\begin{matrix} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D'_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D'_2 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Die Gleichungen paralleler Geraden unterscheiden sich nur durch das konstante Glied.

12. **Kürzester Abstand** zweier Geraden. Man legt durch die erste Gerade eine Ebene parallel der zweiten Geraden. Der Abstand dieser Ebene von der zweiten Geraden ist die gesuchte Größe. Speziell haben die beiden Geraden

$$\left.\begin{matrix} y = mx + b \\ z = nx + c \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} y = m'x + b' \\ z = n'x + c' \end{matrix}\right\}$$

den kürzesten Abstand

$$d = \frac{(n - n')(b - b') - (m - m')(c - c')}{\sqrt{(m n' - m' n)^2 + (m - m')^2 + (n - n')^2}}.$$

§ 110. Ebene und Gerade.

1. Ebene durch zwei sich schneidende Gerade $\left.\begin{matrix} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ und $\left.\begin{matrix} E_3 = 0 \\ E_4 = 0 \end{matrix}\right\}$. Sie hat die Gleichung

$$E_1 - \lambda E_2 = 0 \quad \text{bezw.} \quad E_3 - \mu E_4 = 0.$$

λ und μ müssen sich so bestimmen lassen, daß beide Gleichungen bis auf einen konstanten Faktor identisch werden.

2. Ebene durch zwei parallele Gerade wie 1.

3. Ebene durch eine gegebene Gerade $\left.\begin{matrix} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ parallel einer gegebenen Geraden. Sie hat die Gleichung

$$E_1 - \lambda E_2 = 0,$$

wo λ sich aus der Bedingung bestimmen läßt, daß sich die Ebene $E_1 - \lambda E_2 = 0$ und die zweite Gerade im Unendlichen schneiden.

4. Ebene durch die gegebene Gerade $\left.\begin{matrix} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ und einen gegebenen Punkt P_0. Sie hat die Gleichung

$$E_1 - \lambda E_2 = 0,$$

wo λ sich aus der Bedingung bestimmen läßt, daß P_0 die Gleichung $E_1 - \lambda E_2 = 0$ erfüllt.

5. Ebene durch einen gegebenen Punkt P_0 parallel zu zwei gegebenen Geraden. Durch P_0 lege man zwei Parallele zu den gegebenen Geraden; durch diese zwei ist dann nach 1 die Ebene bestimmt.

6. Ebene durch einen gegebenen Punkt P_0 senkrecht zu einer gegebenen Geraden. Die gesuchte Ebene hat die nämlichen Richtungsfaktoren wie die gegebene Gerade. Also § 108, 10.

7. Winkel ϑ einer gegebenen Ebene $E = 0$ mit einer gegebenen Geraden $\left.\begin{matrix} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \end{matrix}\right\}$. Die Richtungsfaktoren der Ebene sind $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (§ 108, 11), diejenigen der Geraden $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ (§ 109, 6), dann ist

$$\sin\vartheta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu.$$

8. Die Gerade $\left.\begin{matrix} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ liegt in der Ebene $E = 0$, wenn sich $E = 0$ auf die Form $E_1 - \lambda E_2 = 0$ bringen läßt.

9. Die Gerade $\left.\begin{matrix} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ ist parallel der Ebene $E = 0$, wenn sich $E = 0$ auf die Form $E_1 - \lambda E_2 + c = 0$ bringen läßt (oder wenn der Schnittpunkt beider im Unendlichen liegt).

X. Elemente der Theorie der Flächen und Raumkurven.

§ 111. Allgemeine Definitionen.

1. Der Punkt hat im Raum drei Freiheitsgrade. Jede Relation zwischen den laufenden Koordinaten x, y, z dieses Punktes nimmt ihm einen Freiheitsgrad. Eine Gleichung schreibt ihm eine Bewegung von zwei Freiheitsgraden, d. i. eine Bewegung auf einer Fläche vor; zwei Gleichungen schreiben ihm eine Bewegung von zwei Freiheitsgraden, d. i. eine Bewegung auf einer Kurve vor; drei Gleichungen nehmen ihm jede Bewegungsmöglichkeit, definieren ihm also eine feste Lage. (Siehe § 77.)

2. Eine **Fläche** wird also dargestellt

a) durch eine einzige Gleichung zwischen x, y und z

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{oder explizit} \quad z = f(x, y);$$

b) durch zwei Gleichungen mit einem Parameter

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, t) &= 0 \\ G(x, y, z, t) &= 0 \end{aligned}\right\};$$

c) durch drei Gleichungen mit zwei Parametern

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \\ z &= \chi(u, v) \end{aligned}\right\};$$

d) durch n Gleichungen mit n — 1 Parametern. Die Beseitigung der Parameter erzeugt die Darstellung a. Umgekehrt kann man von der Form a auf die andern übergehen durch Einführung von passend gewählten, sonst aber willkürlichen Parametern.

3. Gleichung einer **Flächenschar** (= Flächensystem).

$$F(x, y, z, C) = 0 \quad \text{oder} \quad z = f(x, y, C) \quad \text{usw.}$$

4. Eine **Kurve** (ebene oder räumliche) kann auch als Schnitt zweier Flächen betrachtet werden, hat also zu ihrer Darstellung notwendig (siehe 1)

a) zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ G(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\};$$

b) drei Gleichungen mit einem Parameter

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \\ z &= \chi(t) \end{aligned}\right\};$$

c) n Gleichungen mit n — 2 Parametern. Die Beseitigung der Parameter erzeugt die Darstellung a. Umgekehrt geht man zur Darstellung b durch Einführung eines Parameters über.

5. Die Gleichung 2b oder 2c läßt die Fläche als eine Kurvenschar auffassen.

6. Ein **Punkt** entsteht durch den Schnitt dreier Flächen, hat also zur Darstellung drei Gleichungen notwendig (siehe 1).

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ G(x, y, z) &= 0 \\ H(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{bestimmt und liefert eine endliche Anzahl von Punkten.}$$

7. Ist die z-Axe vertikal im Raum stehend gedacht (relativ zum Beobachter), so nennt man jede zu ihr senkrechte Ebene eine **Horizontal-** oder **Niveauebene.** Die Schnitte solcher Ebenen mit einer Fläche bezeichnet man als deren **Horizontalschnitte,** auch als **Niveaulinien, Niveaukurven** usw.

Gleichung einer Niveaukurve

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ z &= C \end{aligned}\right\} \text{(siehe auch § 114).}$$

8. Die Schnitte der Fläche $F(x, y, z) = 0$ mit den Koordinatenebenen sind dargestellt durch

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \text{bezw.} \left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \text{und} \left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

9. Eine Fläche heißt von der n^{ten} Ordnung, wenn sie von jeder Ebene in einer Kurve n^{ter} Ordnung geschnitten wird.

10. Eine Gleichung n^{ten} Grades in x, y und z stellt eine Fläche n^{ter} Ordnung dar.

11. Eine Raumkurve (= doppelt gekrümmte Kurve) heißt von der n^{ten} Ordnung, wenn sie von jeder Ebene in n Punkten geschnitten wird.

12. Eine Fläche m^{ter} und eine solche n^{ter} Ordnung schneiden sich in einer Raumkurve mn^{ter} Ordnung.

13. Eine Flächenschar heißt **Flächenbüschel**, wenn allen Flächen die gleiche Schnittkurve gemeinsam ist. Die Gleichung des Flächenbüschels durch die Kurve

$$\left.\begin{aligned} F \equiv F(x, y, z) = 0 \\ G \equiv G(x, y, z) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{ist} \quad F - \lambda G = 0.$$

14. Eine Fläche heißt von der m^{ten} Klasse, wenn es durch jede Gerade im Raum m Tangentialebenen an die Fläche gibt.

15. Eine Fläche n^{ter} Ordnung ist von der Klasse

$$m = n(n-1)^2.$$

16. Die Flächen zweiter Ordnung sind von der zweiten Klasse (und umgekehrt).

§ 112. Erzeugung der Flächen.

1. **Gleichung einer Fläche,** allgemein eines geometrischen Gebildes, ist die analytisch ausgedrückte Eigenschaft des die Fläche erzeugenden Elementes.

2. Jede Fläche läßt sich dadurch entstanden denken, daß eine deformierbare (oder nicht deformierbare, also stets kongruente) Kurve auf mehreren gegebenen festen Kurven gleitet; sie kann auch aus einer anderen Fläche durch Deformation entstanden sein.

3. **Linienflächen** oder **Regelflächen** heißen solche Flächen, die durch eine bewegliche Gerade erzeugt werden. Man teilt sie ein in **abwickelbare** und nichtabwickelbare oder gekrümmte, windschiefe Regelflächen. Zwei unendlich be-

nachbarte Gerade einer abwickelbaren Regelfläche schneiden sich; zwei unendlich benachbarte Gerade einer nicht abwickelbaren Regelfläche sind windschief.

Die bewegliche Gerade heißt **Erzeugende**, die festen Kurven, auf denen sie gleitet, heißen **Leitlinien.**

Wie durch eine stetige Aufeinanderfolge von Geraden, so ist auch durch eine stetige Folge von Ebenen bezw. durch deren Schnittgerade eine Regelfläche definiert; die aufeinanderfolgenden Schnittgeraden schneiden sich, die erzeugte Fläche ist also abwickelbar.

4. Die **Zylinderflächen** sind spezielle abwickelbare Regelflächen. Die Erzeugende bleibt stets parallel, hat also die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} y = mx + u \\ z = nx + v \end{array}\right\} \text{ bezw. } \left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z - u = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z - v = 0 \end{array}\right\}.$$

Die Leitlinie ist eine beliebige Kurve

$$\left.\begin{array}{l} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{array}\right\}.$$

Die Zylinderfläche hat die Gleichung $\Phi(u, v) = 0$, wo Φ das Eliminationsresultat von x, y, z aus den vier Gleichungen für die Leitlinie und die Erzeugende ist. Also Gleichung der verlangten Zylinderfläche

$$\Phi(y - mx,\ z - nx) = 0$$

bezw. $$\Phi(A_1x + B_1y + C_1z,\ A_2x + B_2y + C_2z) = 0.$$

5. Fehlt in einer Flächengleichung x, so stellt die Gleichung $F(y, z) = 0$ einen Zylinder parallel zur x-Axe vor. Entsprechend wenn y oder z fehlt.

6. Die **Kegelflächen** sind spezielle abwickelbare Regelflächen. Die Erzeugende geht stets durch einen festen Punkt P_0, hat also die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ z - z_0 = n(x - x_0) \end{array}\right\}.$$

Die Leitlinie ist eine beliebige Kurve $\left.\begin{array}{l} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{array}\right\}$. Die Kegelfläche hat die Gleichung $\Phi(m, n) = 0$, wo Φ das Eliminationsresultat von x, y, z aus den vier Gleichungen für die

Erzeugende und die Leitlinie ist. Also Gleichung der verlangten Kegelfläche

$$\Phi\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}, \frac{z - z_0}{x - x_0}\right) = 0.$$

7. Eine in den Variablen homogene Gleichung stellt einen Kegel mit der Spitze im Ursprung vor.

8. Die **Konoidflächen** sind spezielle nicht abwickelbare Regelflächen. Die Erzeugende schneidet stets eine gegebene Gerade, die Direktrix oder Leitgerade, und bleibt auf einer gegebenen Kurve, der Leitlinie, gleitend einer gegebenen Ebene, der Leitebene, parallel.

Gleichung der Leitgeraden $\left.\begin{matrix} y = mx + b \\ z = nx + c \end{matrix}\right\}$.

Gleichung der Leitebene $Ax + By + Cz = 0$.

Gleichung der Leitkurve $\left.\begin{matrix} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{matrix}\right\}$.

Gleichung der Erzeugenden $\left.\begin{matrix} y = \mu x + \beta \\ z = \nu x + \gamma \end{matrix}\right\}$.

Zwei der unbekannten Größen μ, ν, β, γ, etwa β und γ, sind durch die oben gegebenen Bedingungen bestimmt, d. i. durch

$$(m - \mu)(c - \gamma) = (b - \beta)(n - \nu), \cdots\; \S\, 109.9,$$
$$A + B\mu + C\nu = 0, \cdots\cdots\; \S\, 110.9,$$

nach den andern, hier μ und ν, ausdrückbar.

Die Konoidfläche hat die Gleichung $\Phi(\mu, \nu) = 0$, wo Φ das Eliminationsresultat von x, y, z aus den vier Gleichungen für die Erzeugende und die Leitkurve ist.

9. Macht man zur Erzeugung der Konoidflächen die Leitgerade zur z-Axe, die Leitebene zur z-Ebene, so wird die Gleichung der Leitgeraden $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$, die der Leitebene $z = 0$, die der Leitlinie $\left.\begin{matrix} F = 0 \\ G = 0 \end{matrix}\right\}$ und die der Erzeugengen $\left.\begin{matrix} y = mx \\ z = c \end{matrix}\right\}$. Die Konoidfläche hat die Gleichung $\Phi(m, c) = 0$, wo Φ das Eliminationsresultat von x, y, z aus den vier Gleichungen der Er-

zeugenden und der Leitkurve ist. Also Gleichung der verlangten Konoidfläche

$$\Phi\left(z, \frac{y}{x}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

10. Die **Schraubenfläche** ist eine spezielle Konoidfläche. Ihre Leitkurve ist die **Schraubenlinie**

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = \frac{ht}{2\pi} = ct.$$

Dabei ist a der Radius des Schraubenzylinders, h die Ganghöhe der Schraubenlinie; Leitgerade ist die z-Axe, Leitebene die z-Ebene. Gleichung der Schraubenfläche

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{z}{c} \quad \text{oder} \quad z = c \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

11. **Rotationsflächen** entstehen dadurch, daß ein sich stets parallel bleibender Kreis mit veränderlichem Radius längs einer Kurve so gleitet, daß der Kreismittelpunkt auf einer zur Kreisebene vertikalen Geraden (= Drehaxe) sich bewegt. Die Gleichung der Leitkurve bezw. der Drehaxe ist

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{aligned}\right\} \text{ bezw. } \left.\begin{aligned} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Letztere hat die Richtungskoeffizienten $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und die Spur $P_0 = x_0 | y_0 | 0$ in der z-Ebene. Die Erzeugende (= der Parallelkreis) ist der Schnitt einer Kugel um P_0 mit dem variablen Radius r und einer zur Drehaxe vertikalen Ebene mit dem variablen Abstand p vom Ursprung, hat also die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 - r^2 = 0 \\ x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Die Rotationsfläche hat die Gleichung $\Phi(r, p) = 0$, wo Φ das Eliminationsresultat von x, y, z aus den vier Gleichungen der Erzeugenden und der Leitkurve ist, also

$$\Phi[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2, \quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma] = 0.$$

12. Ist speziell die z-Axe die Drehaxe, so wird die Gleichung der Leitkurve bezw. der Drehaxe

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{aligned}\right\} \text{ bezw. } \left.\begin{aligned} x = 0 \\ y = 0 \end{aligned}\right\},$$

die der Erzeugenden

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ z = p \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = u \\ z = v \end{array}\right\},$$

also die Gleichung der Rotationsfläche $\Phi(u, v) = 0$, wo Φ das Eliminationsresultat von x, y, z aus den vier Gleichungen der Erzeugenden und der Leitkurve ist, also

$$\Phi(x^2 + y^2, z) = 0.$$

13. Die Rotationsflächen kann man sich auch entstanden denken durch Rotation einer *ebenen* Kurve um eine Axe. Dann sind alle Meridiane kongruent mit dieser Kurve. Hat dieselbe in einem ebenen rechtwinkligen Koordinatensystem die Gleichung $F(x, y) = 0$, so hat bei Rotation um die y-Axe, die beim Übergang zum Raumsystem als z-Axe bezeichnet wird, jeder Meridian als ebene Kurve betrachtet die Gleichung

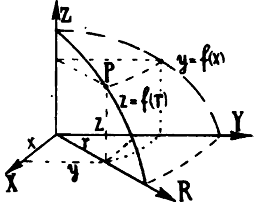


Fig. 47.

$$F(r, z) = 0,$$

wenn $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Abstand des laufenden Punktes von der Rotationsaxe ist. Also Gleichung der Rotationsfläche

$$F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0.$$

14. Bei Rotation um die x-Axe, im Raum z-Axe genannt, wird die Gleichung des Meridians $F(z, r) = 0$, also die Gleichung der Rotationsfläche

$$F\left(z, \sqrt{x^2 + y^2}\right) = 0.$$

§ 113. **Annäherungsfläche.**

1. In der Umgebung des Flächenpunktes $P_0 = x_0 | y_0 | z_0$ läßt sich die Fläche $F(x, y, z) = 0$ ersetzen durch

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = \frac{1}{1!}&[(x - x_0) F_1 + (y - y_0) F_2 + (z - z_0) F_3] \\ + \frac{1}{2!}&[(x - x_0)^2 F_{11} + 2(x - x_0)(y - y_0) F_{12} + (y - y_0)^2 F_{22} \\ &+ 2(x - x_0)(z - z_0) F_{13} + 2(y - y_0)(z - z_0) F_{23} \\ &+ (z - z_0)^2 F_{33}] + \frac{1}{3!}[\,] + \cdots \end{aligned}$$

oder in symbolischer Schreibweise (§ 51. 5)

$$F(x, y, z) = \frac{1}{1!}[(x - x_0) F_1 + (y - y_0) F_2 + (z - z_0) F_3]$$
$$+ \frac{1}{2!}[(x - x_0) F_1 + (y - y_0) F_2 + (z - z_0) F_3]^{(2)} + \cdots.$$

F_1, F_2, F_3, F_{11} usw. sind ebenso wie die noch folgenden f_1, f_2 usw. die partiellen Ableitungen von $F(x, y, z)$ bezw. $f(x, y)$ an der Stelle $P_0 = x_0|y_0|z_0$.

2. Die explizite Darstellung $z = f(x, y)$ ergibt die Annäherungsfläche

$$z - z_0 = \frac{1}{1!}[(x - x_0) f_1 + (y - y_0) f_2] + \frac{1}{2!}[(x - x_0)^2 f_{11}$$
$$+ 2(x - x_0)(y - y_0) f_{12} + (y - y_0)^2 f_{22}] + \frac{1}{3!}[\,] + \cdots$$

oder in symbolischer Schreibweise

$$z - z_0 = \frac{1}{1!}[(x - x_0) f_1 + (y - y_0) f_2]$$
$$+ \frac{1}{2!}[(x - x_0) f_1 + (y - y_0) f_2]^{(2)} + \cdots.$$

3. Je später man abbricht, desto genauer schmiegt sich die Annäherungsfläche an die gegebene Fläche an. Die Annäherung ersten Grades ist die Tangentialebene. Eine beliebige Fläche ist durch Diskussion der Annäherung zweiten Grades in der betrachteten Umgegend hinreichend genau diskutiert.

4. Nach der **Mongeschen Bezeichnungsweise** ist

$$p = f_1, \quad q = f_2, \quad r = f_{11}, \quad s = f_{12}, \quad t = f_{22}.$$

5. Die **Tangentialebene** im Punkt $P_0 = x_0|y_0|z_0$ ist

a) für die Fläche $F(x, y, z) = 0$

$$(x - x_0) F_1 + (y - y_0) F_2 + (z - z_0) F_3 = 0;$$

b) für die Fläche $z = f(x, y)$

$$z - z_0 = (x - x_0) f_1 + (y - y_0) f_2$$

oder

$$z - z_0 = (x - x_0) p + (y - y_0) q.$$

6. In einem **Knotenpunkt** P_0 existiert keine Annäherungsfläche ersten Grades, d. h. in P_0 gibt es unendlich viele Tan-

gentialebenen. Die erste Annäherungsfläche ist vom zweiten Grad, ein Tangentialkegel, umhüllt von den unendlich viel Tangentialebenen. P_0 ist ein Knotenpunkt, wenn für ihn gilt:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0, \quad F = 0.$$

Die Gleichung des Tangentialkegels ist symbolisch

$$[(x - x_0) F_1 + (y - y_0) F_2 + (z - z_0) F_3]^{(2)} = 0.$$

7. In einem gewöhnlichen Punkt $P_0 = x_0 | y_0 | z_0$ einer Fläche sind die **Richtungskoeffizienten der Fläche,** also der Tangentialebene und damit der Flächennormalen,

a) für die Fläche $F(x, y, z) = 0$

$$\cos\alpha = \varrho F_1, \quad \cos\beta = \varrho F_2, \quad \cos\gamma = \varrho F_3,$$

wobei der Proportionalitätsfaktor $\varrho = 1 : \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}$;

b) für die Fläche $z = f(x, y)$

$$\cos\alpha = \varrho f_1, \quad \cos\beta = \varrho f_2, \quad \cos\gamma = -\varrho,$$

oder

$$\cos\alpha = \varrho p, \quad \cos\beta = \varrho q, \quad \cos\gamma = -\varrho,$$

wobei $\varrho = 1 : \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 1} = 1 : \sqrt{p^2 + q^2 + 1}$.

8. Die **Normale** in $P_0 = x_0 | y_0 | z_0$ hat die Gleichung

a) für die Fläche $F(x, y, z) = 0$

$$x - x_0 = \varrho F_1, \quad y - y_0 = \varrho F_2, \quad z - z_0 = \varrho F_3$$

oder

$$\frac{x - x_0}{F_1} = \frac{y - y_0}{F_2} = \frac{z - z_0}{F_3};$$

b) für die Fläche $z = f(x, y)$

$$x - x_0 = \varrho f_1, \quad y - y_0 = \varrho f_2, \quad z - z_0 = -\varrho$$

oder

$$\frac{x - x_0}{f_1} = \frac{y - y_0}{f_2} = \frac{z - z_0}{-1}$$

bezw.

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

§ 114. Diskussion von Flächen und Kurven.

1. Eine beliebige Fläche ist in der Umgebung des untersuchten Punktes genau genug durch Angabe von Tangentialebene und Normale und der Annäherungsfläche zweiten Grades bestimmt. Über letztere sehe man noch § 116 u. f.

Eine Raumkurve ist mit der Darstellung zweier ihrer Projektionen auf die Koordinatenebenen selbst dargestellt.

2. Die **Projektion der Raumkurve** $\left.\begin{array}{r} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{array}\right\}$ auf die z-Ebene ist der Schnitt dieser Ebene mit dem **Projektionszylinder.** Die Elimination von z aus $F = 0$ und $G = 0$ liefert dessen Gleichung $f(x, y) = 0$, so daß die Projektion auf die z-Ebene ist

$$\left.\begin{array}{r} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}.$$

Entsprechend erhält man die Projektionen auf die x- und y-Ebene.

3. Die **Umrißkurve, Kontur, Konturkurve** (siehe 8) einer Fläche $F(x, y, z) = 0$ in der z-Richtung hat die Gleichung

$$\left.\begin{array}{r} F = 0 \\ F_3 = 0 \end{array}\right\}.$$

Der **Tangentialzylinder** oder **Umrißzylinder** an die Fläche $F = 0$ in der z-Richtung hat die Gleichung $f(x, y) = 0$, wo f das Eliminationsresultat von z aus $F = 0$ und $F_3 = 0$ ist. Dann ist die **Umrißprojektion** oder Konturprojektion dieser Fläche $F(x, y, z) = 0$ auf die z-Ebene

$$\left.\begin{array}{r} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}.$$

Entsprechend findet man die Konturen usw. in der x- und y-Richtung.

4. Die **Tangente an eine Raumkurve** $\left.\begin{array}{r} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{array}\right\}$ im Punkt $P_0 = x_0 | y_0 | z_0$ derselben ist die Schnittgerade der beiden Tangentialebenen an die beiden Flächen $F = 0$ und $G = 0$ im Punkt P_0 (siehe auch § 121).

5. Eine Fläche ist **symmetrisch** zur z-Ebene, wenn das Vorzeichen von z belanglos ist. Entsprechend bei Symmetrie zur x- oder y-Ebene.

6. **Mittelpunkt** einer Fläche ist derjenige Punkt, in dem alle Sehnen der Fläche halbiert werden. Der Ursprung ist Mittelpunkt der Fläche, falls mit $a|b|c$ auch $-a|-b|-c$ die Flächengleichung befriedigt.

7. Eine Fläche hat eine **Horizontalstelle** in $P_0 = x_0|y_0|z_0$, wenn für diesen Punkt $F_1 = 0$, $F_2 = 0$. (Der Beschauer sieht die z-Axe vertikal.)

8. Die Fläche hat eine **Vertikalstelle** in $P_0 = x_0|y_0|z_0$, wenn für diesen Punkt $F_3 = 0$. Der geometrische Ort der unendlich vielen Vertikalstellen einer Fläche heißt ihre **Kontur** in der z-Richtung, wenn der Beschauer die z-Axe vertikal sieht (siehe 3).

9. Der Schnitt der Kurve $\left.\begin{array}{l} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{array}\right\}$ mit der Fläche $H(x, y, z) = 0$ liefert $m \cdot n \cdot r$ Punkte, falls F bezw. G und H vom m^{ten}, n^{ten}, r^{ten} Grad in den Variabeln sind.

10. Die partiellen Ableitungen p und q an der Stelle $P_0 = x_0|y_0|z_0$ sind die Richtungen $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\beta$ der durch den Flächenpunkt P_0 parallel zur x- und y-Ebene gelegten Profile, α und β selbst als Richtungswinkel der Profilkurven in den bez. Ebenen vorausgesetzt.

11. Die durch den Punkt P_0 gelegte Horizontalebene (Fig. 48) schneidet die Horizontal- oder Niveaukurve I aus der Fläche aus. Durch die Schnittgerade II der Horizontal- und Tangentialebene ist die **Streichrichtung** der Fläche im Punkt P_0 bestimmt. Die zu beiden Ebenen senkrechte **Profilebene** schneidet aus der Fläche das **Flächenprofil** III, aus der Tangentialebene die Fallrichtung IV aus. Die Schnittgerade von Horizontal- und Profilebene ist V.

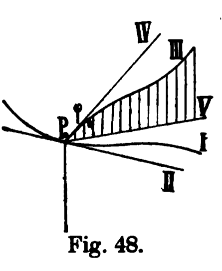


Fig. 48.

12. **Böschungswinkel** φ ist der Winkel von der Horizontal- zur Tangentialebene. Die **Böschung** $\operatorname{tg}\varphi$ der Fläche an der Stelle P_0 ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

§ 115. **Krümmung einer Fläche.**

1. Eine Fläche zweiten Grades wird von jeder Tangentialebene in einem reellen oder imaginären Geradenpaar geschnitten. Der Schnittpunkt dieses Paares ist der Berührpunkt.

2. Eine Fläche höherer Ordnung wird von der Tangentialebene nach einer reellen oder imaginären Kurve geschnitten. Durch den Berührpunkt gehen zwei Äste der Kurve. Ist die Schnittkurve in der Umgebung des Punktes P_0 reell, so ist der Berührpunkt ein gewöhnlicher Doppelpunkt oder ein Rückkehrpunkt (= Spitze) dieser Kurve; ist sie imaginär, so ist der Berührpunkt ein isolierter Punkt.

3. Eine der Tangentialebene unendlich benachbarte Ebene, die **Indikatrixebene,** schneidet die Annäherungsfläche zweiten Grades nach einem Kegelschnitt, der **Indikatrix.** Die zu untersuchende Fläche selbst wird durch diese Ebene nach einer Kurve geschnitten, für welche die Indikatrix die Annäherung zweiten Grades ist.

4. Die untersuchte Fläche ist im Punkt P_0 **elliptisch gekrümmt,** wenn die Indikatrix eine Ellipse ist. Die Tangentialebene, die in der nächsten Umgebung von P_0 auf der nämlichen Seite der Fläche liegt, schneidet die Fläche nach einer imaginären Kurve, für die der Berührpunkt ein isolierter Punkt ist.

5. Die untersuchte Fläche ist im Punkt P_0 **hyperbolisch gekrümmt,** wenn die Indikatrix eine Hyperbel ist. Die Tangentialebene, die in der nächsten Umgebung von P_0 auf beiden Seiten der Fläche liegt, schneidet die Fläche nach einer reellen Kurve, für die der Berührpunkt ein gewöhnlicher Doppelpunkt ist.

6. Die untersuchte Fläche ist im Punkt P_0 **parabolisch gekrümmt,** wenn die Indikatrix eine Parabel ist. Die Tangentialebene berührt die Fläche in der Umgebung von P_0 längs einer Kurve, für welche P_0 ein Rückkehrpunkt (= Spitze) ist.

7. Die Fläche

$$F(x, y, z) = 0 \quad | \quad z = f(x, y)$$

ist in der Umgebung des Punktes P_0 **hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch gekrümmt,** je nachdem

$$D = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \Bigg| \qquad D = s^2 - rt$$

größer, kleiner oder gleich Null ist.

8. Die **parabolische Kurve** einer Fläche trennt das Gebiet hyperbolischer Krümmung vom Gebiet elliptischer Krümmung. In allen Punkten dieser Kurve ist die Krümmung parabolisch. Ihre Gleichung ist

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ D &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

9. Das Maß der Krümmung siehe § 124.

§ 116. Allgemeine Fläche zweiter Ordnung.

1. Die Fläche zweiter Ordnung wird von jeder Ebene nach einem Kegelschnitt und von jeder Geraden in zwei Punkten geschnitten. Von jeder Geraden aus gibt es zwei Tangentialebenen an die Fläche. Eine Fläche zweiter Ordnung ist durch neun Bestimmungsstücke (neun Punkte, neun Berührebenen usw.) ein- oder mehrdeutig bestimmt.

2. Die **allgemeinste Gleichung** der Fläche zweiter Ordnung ist

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0;$$

oder falls man durch Einführung einer vierten Variabeln $w = 1$ die Gleichung formell homogen macht,

$$S \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 \\ + 2a_{14}xw + 2a_{24}yw + 2a_{34}zw + a_{44}w^2 = 0$$

Von dieser homogenen Darstellung kann man in jedem Augenblick zur unhomogenen zurückkehren, indem man $w = 1$ setzt.

3. Eine Fläche zweiter Ordnung ist hinreichend diskutiert, sobald man von ihr angegeben hat

a) die Art: ob Ellipsoid usw.,

b) ihre Eigenschaften: Lage des Mittelpunktes bezw. des Scheitels, Richtung und Größe der Axen usw.,

c) ihre einfachste Gleichung.

Diese Angaben ermöglichen sich mit Hilfe der **Diskriminante** A der Flächengleichung $S = 0$.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

4. Seien die Formen S, Q, R bezw. definiert: S wie in 2;

$$R \equiv a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_{23}y_0z_0 + a_{33}z_0^2 + 2a_{14}x_0w_0 + 2a_{24}y_0w_0 + 2a_{34}z_0w_0 + a_{44}w_0^2;$$

$$\begin{aligned} 2Q \equiv\ & 2x(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}w_0) + 2y(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 \\ & + a_{23}z_0 + a_{24}w_0) + 2z(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}w_0) \\ & + 2w(a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44}w_0) \\ =\ & x_0\frac{\partial S}{\partial x} + y_0\frac{\partial S}{\partial y} + z_0\frac{\partial S}{\partial z} + w_0\frac{\partial S}{\partial w} \\ =\ & xS_1 + yS_2 + zS_3 + wS_4, \end{aligned}$$

wenn S_1, S_2, S_3, S_4 die partiellen Ableitungen an der Stelle $P_0 = x_0|y_0|z_0$ darstellen ($w_0 = 1$).

Dann ist die Gleichung des von $P_0 = x_0|y_0|z_0$ aus an die Fläche $S = 0$ gelegten **Tangentialkegels**

$$Q^2 - SR = 0.$$

5. **Polarebene** (siehe § 72). Die unendlich vielen Strahlen durch den Punkt P_0 — es sind ∞^2 — bilden ein Strahlenbündel. Jeder dieser Strahlen schneidet die Fläche $S = 0$ in zwei reellen oder imaginären Punkten P_1 und P_2. Konstruiert man auf jeder der Sehnen P_1P_2 zu den schon vorhandenen drei Punkten P_0, P_1, P_2 den vierten harmonischen Punkt Q, so bildet die Gesamtheit dieser Punkte Q die Polarebene des Punktes P_0 für die Fläche $S = 0$. Umgekehrt heißt der Punkt P_0 der **Pol** dieser Ebene.

Die Gleichung der Polarebene des Punktes P_0 für die Fläche zweiter Ordnung $S = 0$ ist

$$Q \equiv xS_1 + yS_2 + zS_3 + wS_4 = 0.$$

Der Pol P_0 der Ebene $E \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ für die Fläche $S = 0$ ist bestimmt durch

$$x_0 : y_0 : z_0 : 1 = (AA_{11} + BA_{12} + CA_{13} + DA_{14}) : (AA_{21} + BA_{22} + CA_{23} + DA_{24}) : (AA_{31} + BA_{32} + CA_{33} + DA_{34}) : (AA_{41} + BA_{42} + CA_{43} + DA_{44}),$$

wo A_{ik} die Unterdeterminanten zu a_{ik} in der Diskriminante der Fläche $S = 0$ sind.

6. Die Polarebene eines Punktes P_0 der Fläche zweiter Ordnung ist Tangentialebene in P_0; also Gleichung der Tangentialebene des Punktes P_0 der Fläche $S = 0$

$$Q \equiv xS_1 + yS_2 + zS_3 + wS_4 = 0.$$

7. Die Fläche zweiter Ordnung schneidet sich mit dem Tangentialkegel von P_0 aus und der Polarebene dieses Punktes in der nämlichen Kurve.

8. Bewegt sich der Punkt P_0 auf einer festen Ebene, so dreht sich seine jeweilige Polarebene um den Pol dieser festen Ebene und umgekehrt.

9. Zwei Ebenen heißen konjugierte Ebenen, wenn die eine durch den Pol der andern geht. Zwei Punkte heißen konjugierte Punkte, wenn der eine auf der Polarebene der andern liegt.

10. Ist α die Polarebene des Punktes A, so ist zu einer beliebigen Geraden durch A eine beliebige Gerade in α konjugiert.

11. Der **Mittelpunkt** einer Fläche zweiter Ordnung ist der Pol der unendlich fernen Ebene.

12. Die Polarebene eines unendlich fernen Punktes geht durch den Mittelpunkt, ist also eine Durchmesserebene. Die Richtung zum unendlich fernen Punkt und die Richtung seiner Polarebene heißen **konjugierte Richtungen.** Wenn die Richtung zum unendlich fernen Punkt durch die Richtungsfaktoren

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ gegeben ist, so ist die Gleichung der zu dieser Richtung **konjugierten Durchmesserebene**

$$x(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\cos\beta + a_{13}\cos\gamma) + y(a_{21}\cos\alpha + a_{22}\cos\beta + a_{23}\cos\gamma) + z(a_{31}\cos\alpha + a_{32}\cos\beta + a_{33}\cos\gamma) + (a_{41}\cos\alpha + a_{42}\cos\beta + a_{43}\cos\gamma) = 0.$$

Oder $$\frac{\partial S}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial S}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial S}{\partial z}\cos\gamma = 0.$$

Deren Richtungsfaktoren $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ sind bestimmt durch

$$\cos\alpha' : \cos\beta' : \cos\gamma' = (a_{11}\cos\alpha + a_{12}\cos\beta + a_{13}\cos\gamma) : (a_{21}\cos\alpha + a_{22}\cos\beta + a_{23}\cos\gamma) : (a_{31}\cos\alpha + a_{32}\cos\beta + a_{33}\cos\gamma)$$

13. Der Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ bezw.

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

ist konjugiert der Durchmesser mit der Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial x} : A = \frac{\partial S}{\partial y} : B = \frac{\partial S}{\partial z} : C$$

bezw. $$\frac{\partial S}{\partial x} : \cos\alpha = \frac{\partial S}{\partial y} : \cos\beta = \frac{\partial S}{\partial z} : \cos\gamma .$$

14. Hat die zur Richtung ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) nach dem unendlich fernen Punkt konjugierte Durchmesserebene ebenfalls die Richtungskoeffizienten $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, steht sie also senkrecht zum Vektor nach dem unendlich fernen Punkt, so nennt man diese Richtung eine **Axenrichtung** der untersuchten Fläche zweiter Ordnung.

15. Jede Fläche zweiter Ordnung hat drei Axenrichtungen, die alle reell sind. Die drei Axen stehen zu einander senkrecht.

16. Die drei Axenrichtungen bestimmen sich durch die in Determinantenform gegebene Gleichung dritten Grades für λ

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Jedem der drei daraus berechneten Werte λ entspricht eine Axenrichtung, deren Koeffizienten gegeben sind durch

$$(a_{11}-\lambda)\cos\alpha + a_{12}\cos\beta + a_{13}\cos\gamma = 0,$$
$$a_{21}\cos\alpha + (a_{22}-\lambda)\cos\beta + a_{23}\cos\gamma = 0,$$
$$a_{31}\cos\alpha + a_{32}\cos\beta + (a_{33}-\lambda)\cos\gamma = 0.$$

§ 117. Diskussion der Flächen zweiter Ordnung.

1. Das **Ellipsoid** ist diejenige Fläche zweiter Ordnung, die aus der Kugel durch homogene Deformation nach drei beliebigen Richtungen hervorgeht (siehe § 84, 4 etc.).

2. Läßt man eine Hyperbel um ihre Axen rotieren, so entsteht das ein- oder zweischalige **Rotationshyperboloid.** Durch homogene Deformation geht daraus das gewöhnliche **einschalige** oder **zweischalige Hyperboloid** hervor.

3. Läßt man eine Parabel um ihre Axe rotieren, so entsteht das **Rotationsparaboloid.** Durch homogene Deformation geht daraus das gewöhnliche **elliptische Paraboloid** hervor.

4. Das **hyperbolische Paraboloid (Sattelfläche)** kann auf folgende Weise entstehen: Zwei Parabeln, deren Ebenen senkrecht zueinander stehen, haben Axe und Scheitel gemeinsam. Ihre Öffnungen sind entgegengesetzt gerichtet. Eine Hyperbel, deren Ebene senkrecht zur gemeinsamen Parabelaxe ist, und deren variable Halbaxen a und b ein bestimmtes konstantes Verhältnis bilden, gleitet so auf den Parabeln, daß ihr Mittelpunkt stets auf deren gemeinsamer Axe bleibt, während ihre Scheitel sich auf einer der beiden Parabeln bewegen. Im gemeinsamen Scheitelpunkt beider Parabeln geht die veränderliche Hyperbel von einer Parabel zur andern über (siehe § 120, 7).

5. Die **Kegel** und **Zylinder** zweiter Ordnung haben als Leitkurve einen Kegelschnitt.

6. Eine erste Unterscheidung für die Flächen zweiten Grades gibt die Diskriminante A (siehe § 116). A gibt über die **Art** der Krümmung der Fläche Aufschluß.

$A > 0$: einschaliges Hyperboloid, hyperbolisches Paraboloid, imaginäre Fläche.

$A < 0$: Ellipsoid, zweischaliges Hyperboloid; elliptisches Paraboloid.

$A = 0$: reeller und imaginärer Kegel als Ausartung von Hyperboloid und Ellipsoid, Zylinderfläche (speziell Ebenenpaar) als Ausartung des Paraboloids.

7. Eine zweite Unterscheidung gibt A_{44}.

$A_{44} = 0$: Paraboloide (mit dem Zylinder als Ausartung); sie haben keinen Mittelpunkt, oder anders ausgedrückt, ihr Mittelpunkt liegt im Unendlichen.

$A_{44} \gtrless 0$ **Mittelpunktsflächen**, das sind Flächen mit dem Mittelpunkt im Endlichen.

8. Für die Mittelpunktsflächen ist ein weiteres Unterscheidungsmerkmal der **Asymptotenkegel**, d. i. der Tangentialkegel vom Mittelpunkt aus, der die Fläche in ihrem Schnitt mit der unendlich fernen Ebene berührt. Einen reellen Asymptotenkegel haben das einschalige und zweischalige Hyperboloid, einen imaginären das Ellipsoid und die imaginäre Fläche zweiter Ordnung. Der Asymptotenkegel des Paraboloids ist zur unendlich fernen Ebene ausgeartet.

9. **Diskussionstabelle.**

A	A_{44}	Art der Fläche
<0	$=0$	ell. Paraboloid.
	$\gtrless 0$	imag. Asympt. Kegel: Ellipsoid. reeller Asympt. Kegel: zweisch. Hyperboloid.
>0	$=0$	hyp. Paraboloid.
	$\gtrless 0$	imag. Asympt. Kegel: imag. Fläche. reeller Asympt. Kegel: einsch. Hyperboloid.
$=0$	$=0$	Zylinder. Werden alle Unterdeterminanten A_{ik} Null: Ebenenpaar. Werden alle Unterdeterminanten zweiten Grades von A Null: Doppelebene.
	$\gtrless 0$	imag. oder reeller Kegel.

Der Asymptotenkegel ist reell oder imaginär, je nachdem die Kurve der x-y-Ebene

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

reell oder imaginär ist (siehe § 71).

10. **Mittelpunktsflächen** (Ellipsoid, imaginäre Fläche zweiter Ordnung, Hyperboloid, Kegel). Der Mittelpunkt $P_0 = x_0 | y_0 | z_0$ ist bestimmt durch

$$x_0 : y_0 : z_0 : 1 = A_{41} : A_{42} : A_{43} : A_{44}.$$

Macht man durch Verschiebung des Koordinatensystems den Mittelpunkt zum Anfangspunkt, so wird sich die allgemeine Flächengleichung § 116, 2 vereinfachen zu

$$a_{11} x'^2 + 2 a_{12} x' y' + a_{22} y'^2 + 2 a_{13} x' z' + 2 a_{23} y' z' + a_{33} z'^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0.$$

Die linearen Glieder fehlen also.

Dreht man das Koordinatensystem auch noch, so daß die drei Axen der Fläche Koordinatenaxen werden, so vereinfacht sich die Gleichung weiterhin zur **Axengleichung**

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0.$$

Es kommen also nur mehr die rein quadratischen Glieder vor. λ_1, λ_2, λ_3 sind die Wurzeln der Gleichung § 116, 16.

11. **Paraboloide.** Sie haben ihren Mittelpunkt im Unendlichen. Dreht man das Koordinatensystem so, daß die Koordinatenaxen parallel werden den drei Axenrichtungen des Paraboloids, so vereinfacht sich die allgemeine Gleichung zu

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2 m x' + 2 n y' + 2 p z' + a_{44} = 0.$$

$$m = a_{14} \cos \alpha_1 + a_{24} \cos \beta_1 + a_{34} \cos \gamma_1,$$
$$n = a_{14} \cos \alpha_2 + a_{24} \cos \beta_2 + a_{34} \cos \gamma_2,$$
$$p = a_{14} \cos \alpha_3 + a_{24} \cos \beta_3 + a_{34} \cos \gamma_3.$$

Die Richtungskoeffizienten $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ werden nach § 116, 16 bestimmt, desgleichen die Werte λ_1 und λ_2 der dortigen Determinantengleichung. Wegen $A_{44} = 0$ ist die dritte Wurzel $\lambda_3 = 0$.

Der Scheitel des Paraboloids hat noch allgemeine Lage zum Anfangspunkt. Verschiebt man das Koordinatensystem, bis der Scheitel Anfangspunkt wird, so vereinfacht sich die Paraboloidsgleichung weiterhin zur **Scheitelgleichung**

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2 p z'' = 0.$$

§ 118. **Kreisschnittebenen. Nabelpunkte.**

1. Die Ebene $E \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ schneidet die Fläche zweiter Ordnung $S = 0$ nach einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}$$

bezw. kleiner, größer oder gleich Null ist.

2. Schneidet eine Ebene die Fläche zweiter Ordnung nach einem Kreis, so heißt sie eine **Kreisschnittebene** dieser Fläche.

3. Schneidet eine Ebene die Fläche zweiter Ordnung nach einem Kreis, so tut dies auch jede Parallelebene.

4. Für jede Fläche zweiter Ordnung gibt es sechs Systeme von Kreisschnittebenen. Durch jeden Punkt gehen sechs Kreisschnittebenen, von denen höchstens zwei reell sind. Durch jede Axe gehen zwei reelle oder imaginäre Kreisschnittebenen.

5. Die berührenden Kreisschnittebenen berühren die Fläche zweiter Ordnung in den **Nabelpunkten**; der ausgeschnittene Kreis ist unendlich klein geworden.

6. Von den zwölf Nabelpunkten einer Fläche zweiter Ordnung sind höchstens vier reell.

7. Die Nabelpunkte liegen in den Hauptebenen.

8. Für einen Nabelpunkt ist die Indikatrix ein Kreis. Spezielles siehe § 120.

§ 119. **Regelflächen zweiter Ordnung.**

1. Schneidet eine Ebene die Fläche zweiter Ordnung nach einer Geraden, dann auch noch nach einer zweiten.

2. Die Fläche zweiter Ordnung heißt Regelfläche zweiter Ordnung, wenn jede Tangentialebene die Fläche nach einem Paar reeller verschiedener Geraden schneidet

(einsch. Hyperboloid, hyperb. Paraboloid). Sie heißt Kegel zweiter Ordnung, wenn jede Tangentialebene nach einem Paar zusammenfallender Geraden schneidet. Sie heißt Fläche zweiter Ordnung mit elliptischen Punkten, wenn jede Tangentialebene nach einem Paar imaginärer Geraden schneidet.

3. Die Regelflächen zweiter Ordnung sind das Erzeugnis von zwei projektiven Ebenenbüscheln. Jede Ebene des Büschels $E_1 - \lambda E_2 = 0$ schneidet die zugeordnete Ebene des projektiven Büschels $E_3 - \mu E_4 = 0$ in einer Geraden. Die Zuordnung erfolgt im allgemeinsten Fall durch eine bilineare Gleichung zwischen λ und μ

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0.$$

4. Läßt man eine Gerade so auf zwei andern festen windschiefen gleiten, daß sie stets zu einer gegebenen Ebene, der Leitebene, parallel bleibt, so erzeugt sie eine Regelfläche zweiter Ordnung, das hyperbolische Paraboloid (siehe Konoid, § 112).

5. Läßt man eine Gerade auf drei andern festen gegenseitig windschiefen Geraden gleiten, so erzeugt sie eine Regelfläche zweiter Ordnung, das einschalige Hyperboloid.

§ 120. Spezielle Flächen zweiter Ordnung.

1. **Kugel.** Die allgemeine Gleichung $S = 0$ stellt eine Kugel dar, wenn $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$. Die Kugel ist noch durch vier Bedingungen bestimmt.

Normalgleichung der Kugel um den Mittelpunkt $P_0 = x_0|y_0|z_0$ mit dem Radius r.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0.$$

Von der allgemeinen Kugelgleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0$$

geht man durch quadratische Ergänzung zur Normalgleichung über.

2. **Ellipsoid** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$

Die Polarebene des beliebigen Punktes P_0 und die Tangentialebene des Flächenpunktes P_0 haben die Gleichung

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1=0.$$

Der Pol P_0 der Ebene $E\equiv Ax+By+Cz+D=0$ ist bestimmt durch

$$x_0:y_0:z_0:1=Aa^2:Bb^2:Cc^2:-D.$$

Zu $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1=0$ heißt der konjugierte Durchmesser $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}$.

Unter der Voraussetzung $a>b>c$ sind die reellen Kreisschnittebenen durch den Mittelpunkt (sie gehen durch die mittlere Axe)

$$\frac{z}{x}=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}.$$

Das Ellipsoid hat vier reelle Nabelpunkte. Werden zwei der Halbaxen a, b, c gleich, so wird das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid.

3. **Imag. Fläche zweiter Ordnung** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0.$ Sie hat keinen reellen Punkt.

4. **Zweischaliges Hyperboloid** $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$ Die Fläche schneidet die x- und y-Ebene nach Hyperbeln, die z-Ebene nach einem imaginären Kegelschnitt. Die Polarebene eines beliebigen Punktes P_0 und die Tangentialebene des Flächenpunktes P_0 haben die Gleichung

$$-\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1=0.$$

Der Asymptotenkegel hat die Gleichung

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Die zwei reellen Kreisschnittebenen durch den Mittelpunkt haben die Gleichung

$$\frac{y}{z} = \pm \frac{b}{c} \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2}} \cdots\cdot \quad a > b.$$

Die Fläche hat vier reelle Nabelpunkte.

Wird $a = b$, so wird die Fläche ein Rotationshyperboloid mit der z-Axe als Drehaxe.

5. **Einschaliges Hyperboloid** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

Die Fläche schneidet die x- und y-Ebene nach Hyperbeln, die z-Ebene nach einer Ellipse.

Die Polarebene eines beliebigen Punktes P_0 und die Tangentialebene des Flächenpunktes P_0 haben als Gleichung

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0.$$

Der Asymptotenkegel hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Die zwei reellen Kreisschnittebenen durch den Mittelpunkt haben die Gleichung

$$\frac{y}{z} = \pm \frac{b}{c} \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2}} \cdots\cdot \quad a > b.$$

Die Nabelpunkte sind alle imaginär.

Wird $a = b$, so wird die Fläche ein Rotationshyperboloid. Das einschalige Hyperboloid wird als Regelfläche erzeugt (siehe § 119, 5) entweder durch die projektiven Büschel

$$E_1 - \lambda E_2 = \left(\frac{x}{a} + 1\right) - \lambda\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0,$$

und

$$E_3 - \lambda E_4 = \lambda\left(\frac{x}{a} - 1\right) + \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 0;$$

oder durch die projektiven Büschel

$$E'_1 - \mu E'_2 = \left(\frac{x}{a} + 1\right) - \mu\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 0,$$

$$E'_3 - \mu E'_4 = \mu\left(\frac{x}{a} - 1\right) + \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0.$$

Auf dem einschaligen Hyperboloid liegen folgende Gerade:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+1=0\\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+1=0\\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-1=0\\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-1=0\\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0\end{aligned}\right\}\quad \text{usw.}$$

6. **Elliptisches Paraboloid** $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$.

(a und b haben gleiches Vorzeichen.) Die Fläche schneidet die x- und y-Ebene nach Parabeln mit den Krümmungsradien a bezw. b. Beide Parabeln öffnen sich in der z-Richtung gleichzeitig nach oben oder unten. Die z-Ebene ist Scheiteltangentialebene.

Die Polarebene des beliebigen Punktes P_0 und die Tangentialebene des Flächenpunktes P_0 haben als Gleichung

$$z + z_0 = \frac{x x_0}{a} + \frac{y y_0}{b}.$$

Die zwei reellen Kreisschnittebenen durch den Mittelpunkt sind

$$\frac{z}{y} = \pm\sqrt{\frac{a-b}{b}} \;\cdots\; a > b.$$

Die Fläche hat zwei reelle Nabelpunkte.

Wird $a = b$, so wird die Fläche ein Rotationsparaboloid.

7. **Hyperbolisches Paraboloid** $2z = \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}$.

(a und b haben gleiches Vorzeichen.) Die Fläche schneidet die x- und y-Ebene nach Parabeln mit den Krümmungsradien a und b; beide laufen in der z-Richtung, öffnen sich aber nach verschiedenen Seiten. Die z-Ebene ist Scheiteltangentialebene, der Ursprung Sattel (siehe § 117, 4).

Die Polarebene des beliebigen Punktes P_0 und die Tangentialebene des Flächenpunktes P_0 haben als Gleichung

$$z + z_0 = \frac{x x_0}{a} - \frac{y y_0}{b}.$$

Das hyperbolische Paraboloid hat nur imaginäre Kreisschnittebenen.

Das hyperbolische Paraboloid wird als Regelfläche erzeugt (nach § 119 ist sie ein spezielles Konoid) entweder durch die projektiven Büschel

$$z - \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}}\right) = 0 \quad \text{und} \quad -2\lambda + \left(\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}}\right) = 0;$$

oder durch die folgenden

$$z - \mu\left(\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}}\right) = 0 \quad \text{und} \quad -2\mu + \left(\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}}\right) = 0.$$

Auf dem hyperbolischen Paraboloid liegen die Geraden

$$\left.\begin{array}{l} z = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} z = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{usw.}$$

8. **Reeller Kegel** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$

Er hat seine Spitze im Ursprung, schneidet die x- und y-Ebene nach einem reellen, die z-Axe nach einem imaginären Geradenpaar. Er ist eine Ausartung des Hyperboloids, und zwar der Übergang vom zweischaligen zum einschaligen. Als abwickelbare Regelfläche betrachtet ist er das Erzeugnis von zwei projektiven Ebenenbüscheln, deren Träger sich schneiden.

Die Polarebene des beliebigen Punktes P_0 und die Tangentialebene des Flächenpunktes P_0 haben als Gleichung

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 0.$$

Die zwei reellen Kreisschnittebenen durch den Mittelpunkt sind

$$\frac{y}{z} = \pm \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2}} \cdots\cdot \; a > b.$$

Nabelpunkt ist die Spitze.

9. **Imaginärer Kegel** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$

Er hat nur einen reellen Punkt, die Spitze.

10. **Zylinder** sind Ausartungen der Paraboloide. Als abwickelbare Regelflächen betrachtet sind sie das Erzeugnis von

zwei projektiven Ebenenbüscheln mit parallelen Trägern. Je nachdem die Leitkurve des Zylinders (siehe § 112) eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, hat man den

a) elliptischen Zylinder $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$;

Polarebene zu P_0 $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1=0$;

die zwei reellen Kreisschnittebenen durch den Ursprung sind

$$\frac{z}{y}=\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} \quad \dots . \quad a>b,$$

die Nabelpunkte sind alle imaginär;

b) hyperbolischen Zylinder $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$;

Polarebene zu P_0 $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-1=0$;

die Kreisschnittebenen sind alle imaginär;

c) parabolischen Zylinder $y^2=2px$;

Polarebene zu P_0 $yy_0=p(x+x_0)$;

die Kreisschnittebenen sind alle imaginär.

Von einer Ebene werden diese drei Zylinder geschnitten entweder nach einem Paar paralleler Geraden oder aber nach einer Ellipse der elliptische Zylinder, nach einer Hyperbel der hyperbolische und nach einer Parabel der parabolische.

§ 121. Die ausgezeichneten Richtungen einer Raumkurve.

1. Über die Darstellung der Raumkurven (auch doppelt gekrümmte oder gewundene Kurven genannt) siehe § 111.

2. In der Darstellung

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)$$

ist der Parameter t, vom Standpunkt der Mechanik aus betrachtet, die Zeit. Oft ist Parameter der von einem bestimmt gewählten Anfangspunkt ab gerechnete Kurvenbogen s.

3. Die **Projektion der Raumkurve** $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$ ist auf die x- bezw. y- und z-Ebene

$$\left.\begin{matrix} y=\psi(t)\\ z=\chi(t)\end{matrix}\right\}\text{ bezw. }\left.\begin{matrix} z=\chi(t)\\ x=\varphi(t)\end{matrix}\right\}\text{ und }\left.\begin{matrix} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{matrix}\right\}.$$

4. Das **Bogenelement** ds ist bestimmt durch

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dt^2} = dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

5. Für die Raumkurve charakteristisch sind die drei ausgezeichneten Richtungen der **Tangente** mit den Richtungskoeffizienten $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, der **Hauptnormalen** mit $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ und der **Binormalen** mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$. Zu ihnen steht senkrecht die **Normalebene** bezw. **Rektifikationsebene** und **Schmiegungsebene.**

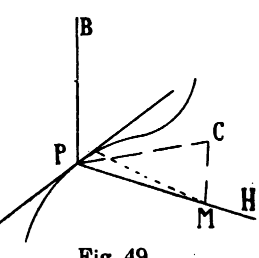


Fig. 49.

6. Die Tangente (und damit die Normalebene) im untersuchten Punkt ist bestimmt durch zwei unendlich benachbarte Punkte; die Schmiegungsebene (und damit die Binormale) durch drei unendlich benachbarte Punkte oder zwei unendlich benachbarte Tangenten. In der Schmiegungsebene verhält sich die Raumkurve wie eine ebene Kurve. Unter den unendlich vielen Normalen sind ausgezeichnet die in der Schmiegungsebene liegende Hauptnormale und die zu ihr vertikale Binormale. Durch letztere und die Tangente ist die Rektifikationsebene bestimmt (Fig. 49).

7. Konstruiert man um einen beliebigen Punkt die Einheitskugel, d. i. eine Kugel mit dem Radius 1, und zieht von diesem Punkt aus Parallele zu den Einzeltangenten der Raumkurve, so schneiden dieselben auf der Kugel das **sphärische Bild** der Raumkurve aus. Dem Punkt P der ursprünglichen Kurve ist dann der Punkt P' des sphärischen Bildes zugeordnet. Nimmt man den Ursprung als Kugelmittelpunkt, so ist die Gleichung der sphärischen Kurve (siehe Tangentenrichtung in 5)

$$x = \cos\alpha, \quad y = \cos\beta, \quad z = \cos\gamma.$$

8. Die Tangente an die sphärische Abbildung im Punkt P' ist parallel zur Hauptnormalen der ursprünglichen Kurve im Punkt P.

9. Bezeichnet man mit x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des untersuchten Punktes, mit x, y, z die laufenden Koordinaten, sind ferner

$$x' = \frac{dx}{dt} = \varphi', \quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad x''' = \frac{d^3x}{dt^3},$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = \psi', \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dt^3},$$

$$z' = \frac{dz}{dt} = \chi', \quad z'' = \frac{d^2z}{dt^2}, \quad z''' = \frac{d^3z}{dt^3},$$

$$s' = \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad s'' = \frac{d^2s}{dt^2}$$

die Ableitungen an der untersuchten Stelle, ferner ϱ_1 und ϱ_2 die § 122 bestimmten Größen, so sind die ausgezeichneten Geraden und Ebenen des untersuchten Punktes wie folgt gegeben:

10. Gleichung und Richtungskoeffizienten von

a) Tangente bezw. Normalebene.

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma};$$

bezw. $(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\cos\beta + (z - z_0)\cos\gamma = 0;$

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma : 1 = x' : y' : z' : s'.$$

b) Hauptnormale bezw. Rektifikationsebene.

$$\frac{x - x_0}{\cos a} = \frac{y - y_0}{\cos b} = \frac{z - z_0}{\cos c};$$

bezw. $(x - x_0)\cos a + (y - y_0)\cos b + (z - z_0)\cos c = 0;$

$\cos a : \cos b : \cos c : \varrho_2 = (x''s' - x's'') : (y''s' - y's'') : (z''s' - z's'') : s'^3.$

c) Binormale bezw. Schmiegungsebene.

$$\frac{x - x_0}{\cos\lambda} = \frac{y - y_0}{\cos\mu} = \frac{z - z_0}{\cos\nu};$$

bezw. $(x - x_0)\cos\lambda + (y - y_0)\cos\mu + (z - z_0)\cos\nu = 0;$

$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu : \varrho_2 = (y'z'' - y''z') : (z'x'' - z''x') : (x'y'' - x''y') : s'^3.$

§ 122. Krümmung und Windung der Raumkurven.

1. **Kontingenzwinkel** $d\tau$ der Raumkurve im untersuchten Punkt P ist der Winkel (im Bogenmaß) von zwei unendlich benachbarten Tangenten oder von zwei unendlich benachbarten Hauptnormalen. Auf dem sphärischen Bild ist $d\tau$ der Abstand der unendlich benachbarten Punkte P' und P'_1.

$$d\tau = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}.$$

2. **Krümmungsmittelpunkt** M ist der Schnittpunkt von zwei unendlich benachbarten Hauptnormalen. Durch ihn ist der **Hauptkrümmungsradius** oder **erste Krümmungsradius** $\varrho_1 = PM$ (Fig. 49) definiert. **Hauptkrümmung** oder **erste Krümmung** (auch Flexion) ist der reziproke Wert von ϱ_1.

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{d\tau}{ds} = \frac{s'^2}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}.$$

3. **Torsions-** oder **Windungswinkel** $d\sigma$ der Raumkurve ist der Winkel von zwei unendlich benachbarten Schmiegungsebenen. Konstruiert man ein zweites sphärisches Bild der Kurve, indem man durch den Mittelpunkt der Einheitskugel alle Parallelen zu den Binormalen legt, so daß also dem Kurvenpunkt P der Bildpunkt P'' entspricht, so ist $d\sigma$ der Abstand von zwei unendlich benachbarten Punkten P'' und P''_1.

$$d\sigma = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}.$$

4. Der **Torsionsradius** ist definiert durch $ds = \varrho_2 \, d\sigma$. **Torsion** oder **zweite Krümmung** (auch Verwindung) ist der reziproke Wert von ϱ_2.

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\varrho_1^2}{s'^6} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

5. **Schmiegungskugel** oder **Oskulationskugel** ist die Kugel durch vier unendlich benachbarte Kurvenpunkte.

6. **Krümmungsaxe** MC ist die Schnittgerade von zwei unendlich benachbarten Normalebenen; sie ist parallel der Binormalen und geht durch den Krümmungsmittelpunkt M, Fig. 49.

7. Der Mittelpunkt C der Schmiegungskugel ist der Schnittpunkt von zwei unendlich benachbarten Krümmungsaxen oder von drei unendlich benachbarten Normalebenen, Fig. 49.

8. Die Schmiegungskugel schneidet die Schmiegungsebene im Krümmungskreis.

9. Der Radius $PC = r$ der Schmiegungskugel ist bestimmt durch

$$r^2 = \varrho_1^{\,2} + \varrho_2^{\,2} \left(\frac{d\varrho_1}{ds}\right)^2.$$

10. Frenetsche oder Serretsche Formeln.

$$d\cos\alpha : d\cos\beta : d\cos\gamma : ds = \cos a : \cos b : \cos c : \varrho_1.$$

$$d\cos\lambda : d\cos\mu : d\cos\nu : ds = \cos a : \cos b : \cos c : \varrho_2.$$

$$d\cos a : d\cos b : d\cos c : ds = (\varrho_1 \cos\lambda + \varrho_2 \cos\alpha) : (\varrho_1 \cos\mu + \varrho_2 \cos\beta) : (\varrho_1 \cos\nu + \varrho_2 \cos\gamma) : -\varrho_1\varrho_2.$$

11. Geht die Kurve in P von einer Windung in die andere über, so ist in diesem Punkt die Windung Null, die Schmiegungsebene wird zur **Wendeberührebene.** Dann muß für den Wendeberührpunkt P gelten

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

12. Eine Raumkurve ist eine **ebene Kurve,** wenn die Gleichung 11 für jeden Punkt gilt.

13. Eine Raumkurve vom Typus

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 + b_1 t + c_1 t^2 \\ y &= a_2 + b_2 t + c_2 t^2 \\ z &= a_3 + b_3 t + c_3 t^2 \end{aligned}\right\}$$

ist immer eine ebene Kurve.

14. Ist in jedem Punkt die Hauptkrümmung Null, so ist die Kurve eine **Gerade.**

15. Die Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ kann im Punkt P ersetzt werden durch eine Näherungskurve. Macht man P zum Nullpunkt, die Tangente, Hauptnormale, Binormale zur

x- bezw. y- und z-Axe, so lautet die Gleichung der Näherungskurve

$$x = at, \quad y = bt^2, \quad z = ct^3.$$

Die Kurve projiziert sich auf die x-Ebene, d. i. die Normalebene, als Neilsche Parabel $c^2y^3 = b^3z^2$, auf die y-, d. i. die Rektifikationsebene, als kubische Parabel $cx^3 = a^3z$, und auf die z-, d. i. die Schmiegungsebene, als einfache Parabel $x^2b = a^2y$.

§ 123. Spezielle Raumkurven.

1. **Schraubenlinie** $x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad z = ct$

$$\text{oder} \quad x = r\cos\frac{z}{c}, \quad y = r\sin\frac{z}{c}.$$

Sie liegt auf einem Kreiszylinder vom Radius r und schneidet alle Parallelkreise des Zylinders unter dem konstanten Winkel φ, so zwar daß $\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{2r\pi} = \frac{c}{r}$, wo h die Ganghöhe der Schraubenlinie ist. Sie erscheint auf dem abgewickelten Kreiszylinder als Gerade, ist also eine geodätische Linie des Zylinders (siehe § 125).

Die Hauptnormale der Schraubenlinie ist gleichzeitig Flächennormale des Zylinders, steht also senkrecht zur Zylinderaxe.

Die beiden Krümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 sind konstant.

$$\varrho_1 = \frac{c^2 + r^2}{r}, \quad \varrho_2 = \frac{c^2 + r^2}{c}.$$

Bogenlänge $s = t\sqrt{c^2 + r^2} = \frac{rt}{\cos\varphi}$.

Konstruktion. Die Ganghöhe h teilt man in n Teile, ebenso den Kreisumfang. Dann Konstruktion nach Skizze Fig. 50.

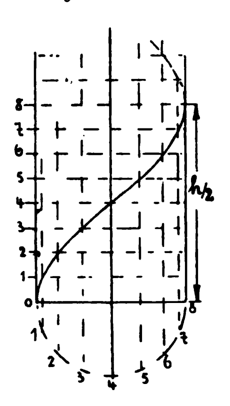


Fig. 50.

2. Die **allgemeine Schraubenlinie** liegt auf einem Zylinder mit beliebiger Leitkurve, und ist geodätische Linie desselben.

Bilden die Krümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 einer Raumkurve ein konstantes Verhältnis, so ist die Raumkurve eine allgemeine Schraubenlinie.

3. Die **konische Spirale** $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ ist eine allgemeine Schraubenlinie und zwar auf einem Zylinder, der eine logarithmische Spirale als Leitkurve hat. Gleichzeitig liegt sie auf einem Rotationskegel und schneidet jeden Kreis desselben unter gleichem Winkel. Bei der Abwicklung des Kegels erscheint sie als logarithmische Spirale. Ihre Hauptnormale steht senkrecht auf der Axe des Rotationskegels.

4. **Loxodromen** sind Kurven auf Rotationsflächen, die jeden Meridian unter gleichem Winkel schneiden. Die Kreiszylinderschraubenlinie und die konische Spirale sind also spezielle Loxodromen.

§ 124. Krümmungsmaß einer Fläche.

1. Hat man für die Diskussion der Fläche $z = f(x, y)$ einen Ausdruck gefunden, der die Größen p, q, r, s, t enthält (siehe § 113, 4), so findet man die entsprechende Form für die Fläche $F(x, y, z) = 0$ durch die Substitution von p, q, r, s, t aus den Gleichungen

$$F_1 + p F_3 = 0, \quad F_2 + q F_3 = 0,$$

$$F_{11} + 2p F_{13} + p^2 F_{33} + r F_3 = 0, \quad F_{22} + 2q F_{23} + q^2 F_{33} + t F_3 = 0,$$

$$F_{12} + q F_{13} + p F_{23} + p q F_{33} + s F_3 = 0.$$

2. Die Fläche $z = f(x, y)$ ist in der Nähe des Punktes $P_0 = x_0 | y_0 | z_0$ hinreichend diskutiert durch die oskulierende Fläche zweiter Ordnung, das **Näherungsparaboloid**

$$z = z_0 + p(x - x_0) + q(y - y_0) + \frac{1}{2}[r(x - x_0)^2 + 2s(x - x_0)(y - y_0) + t(y - y_0)^2].$$

Dabei sind wieder p, q, r, s, t wie auch die später auftretenden Formen F_1, F_2 etc. die partiellen Ableitungen an der Stelle P_0.

3. Macht man den untersuchten Punkt P_0, d. i. der Scheitel des Näherungsparaboloides, zum Ursprung eines neuen Koordinatensystems, dessen Axenrichtungen auch diejenigen des Paraboloids sind, so nimmt das letztere die einfache Gleichung an

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}.$$

Die Normale in P_0 an die Fläche, d. i. die Axe des Paraboloids, ist z-Axe, die Tangentialebene z-Ebene geworden.

4. Alle Ebenen durch die Normale, die **Normalebenen**, schneiden die Fläche in **Normalschnitten**, das Näherungsparaboloid in Parabeln mit gemeinsamem Scheitel und gemeinsamer Axe. Unter diesen unendlich vielen sind zwei zueinander ausgezeichnet, die Parabel mit größtem und diejenige mit kleinstem Krümmungsradius. Ihre Ebenen heißen **Hauptebenen**, die beiden Krümmunngsradien **Hauptkrümmungsradien** ϱ_1 und ϱ_2, deren reziproke Werte **Hauptkrümmungen** $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$, die entsprechenden Normalschnitte der Fläche **Hauptschnitte**.

5. Die Hauptkrümmungsradien des Näherungsparaboloides $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ sind $\varrho_1 = a$ und $\varrho_2 = b$, die Hauptkrümmungen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$.

6. Für irgend zwei zueinander senkrechte Normalschnitte des Näherungsparaboloides ist die Summe der beiden Krümmungen konstant.

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{\varrho'_1} + \frac{1}{\varrho'_2}.$$

7. Die Fläche ist im untersuchten Punkt P_0 elliptisch bezw. hyperbolisch gekrümmt, je nachdem dort ϱ_1 und ϱ_2 gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Im ersten Fall öffnen sich beide Parabeln nach der gleichen Richtung (elliptisches Paraboloid), im zweiten Fall nach der entgegengesetzten (hyperbolisches Paraboloid).

8. Satz von **Euler**. Bildet ein Normalschnitt mit der ersten Hauptebene den Winkel φ, so ist seine Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_2};$$

$$\varrho = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 \sin^2\varphi + \varrho_2 \cos^2\varphi}.$$

9. Satz von **Meunier**. Legt man durch den untersuchten Punkt P_0 eine beliebige Ebene ε, welche mit der Normalen den

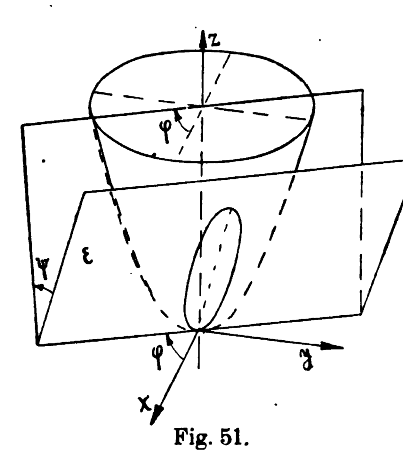


Fig. 51.

Winkel ψ bildet, so schneidet sie die Fläche in einer Kurve mit dem Krümmungsradius $\varrho' = \varrho \cos\psi$, wenn ϱ der Krümmungsradius desjenigen Normalschnittes ist, der mit der Ebene ε in der Tangentialebene die Spur gemeinsam hat (Fig. 51).

10. Das **Krümmungsmaß** (auch Gaussches oder Hauptkrümmungsmaß) im Punkt P_0 ist definiert

$$K = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}.$$

11a. Im Punkt P_0 der Fläche $z = f(x, y)$ ist

$$K = \frac{rt - s^2}{(p^2 + q^2 + 1)^2}.$$

11b. Im Punkt P_0 der Fläche $F(x, y, z) = 0$ ist

$$K = \frac{-D}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^2}, \quad \text{wenn } D = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

12. Die **mittlere Krümmung** im Punkt P_0 ist definiert

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

12a. Im Punkt P_0 der Fläche $z = f(x, y)$ ist

$$2M = -\frac{r(q^2 + 1) + t(p^2 + 1) - 2pqs}{(p^2 + q^2 + 1)^{3/2}}.$$

12b. Im Punkt P_0 der Fläche $F(x, y, z) = 0$ ist

$$2M = \frac{D_{11} + D_{22} + D_{33}}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{3/2}},$$

wenn D_{11}, D_{22}, D_{33} die Unterdeterminanten zu F_{11}, F_{22}, F_{33} in der obigen Determinante D sind.

13. Die beiden Hauptkrümmungsradien im Punkt P_0 einer Fläche sind bestimmt durch die Gleichung

$$\varrho^2 K - 2\varrho M + 1 = 0.$$

14. Je nachdem in einem Punkt P_0 die Fläche elliptisch bezw. parabolisch oder hyperbolisch gekrümmt ist, wird

$$K > 0 \quad \text{bezw.} \quad K = 0 \quad \text{oder} \quad K < 0.$$

15. **Flächen konstanten Krümmungsmaßes.** Für sie ist in jedem Punkt $K = c$.

Flächen konstanten gleichen Krümmungsmaßes sind aufeinander abwickelbar. Insbesonders sind Flächen mit dem konstanten Krümmungsmaß $K = 0$ auf eine Ebene abwickelbar.

16. Die Hauptschnittebenen einer **Rotationsfläche** in P_0 sind der Meridian und eine zu ihm senkrechte Ebene durch P_0. Hauptkrümmungsradien in P_0 sind erstens der Krümmungsradius des Meridians, zweitens das Normalenstück von P_0 bis zur Rotationsaxe.

17. In einem **Nabelpunkt** sind die Hauptkrümmungsradien gleich groß.

18. Wenn man eine Fläche **biegt** (Formänderung ohne Längenänderung), so ändert sich ihr Krümmungsmaß im Punkt P_0 nicht.

19. Die eine der Hauptschnittebenen einer **Regelfläche** geht durch die erzeugende Gerade.

20. **Flächen konstanter mittlerer Krümmung.** Für sie ist in jedem Punkt $M = c$.

21. **Minimalflächen** oder Flächen kleinsten Flächeninhalts haben die Gleichung $M = 0$ (und umgekehrt).

Unter allen Minimalflächen gibt es nur eine reelle abwickelbare: die Ebene, nur eine Regelfläche: die Schraubenfläche, und nur eine Rotationsfläche: das Katenoid (entstanden durch Rotation der Kettenlinie). Schraubenfläche und Katenoid lassen sich aufeinander abwickeln.

§ 125. Krümmungslinien. Asymptotische Kurven. Geodätische Linien.

1. In jedem Punkt der untersuchten Fläche sind durch die Axen der Indikatrix zwei ausgezeichnete Richtungen festgelegt: die **Hauptkrümmungsrichtungen.** Und durch ihre Asymptoten zwei weitere ausgezeichnete: die **Haupttangentenrichtungen.** Die ersteren sind immer reell, letztere reell oder imaginär. Die ersteren sind die Winkelhalbierenden der letzteren.

2. Je nachdem die Indikatrix eine Hyperbel oder Ellipse, sind ihre Asymptoten reell oder imaginär. Ist ε der unendlich kleine Abstand der Indikatrixebene von der Tangentialebene, so ist im untersuchten Punkt P_0 die Gleichung der Indikatrix $2\varepsilon = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$, die Gleichung der Asymptoten $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 0$ oder $\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$, falls man die günstigste Wahl des Koordinatensystems gegenüber dem Näherungsparaboloid wie in § 124 trifft.

3. Die Hauptkrümmungsrichtungen im untersuchten Punkt werden durch die Hauptebenen, die Haupttangentenrichtungen durch die Tangentialebene auf der Fläche ausgeschnitten.

4. Geht man von einem Punkt in der Hauptkrümmungsrichtung zu einem Nachbarpunkt und von da ebenso zum nächsten weiter, so bewegt man sich auf einer **Hauptkrümmungslinie.** Alle Hauptkrümmungslinien auf der Fläche bilden zwei Systeme von Orthogonalkurven. Entsprechend erhält man aus den Haupttangentenrichtungen die **Asymptotenkurven** auf der Fläche, die natürlich nur im hyperbolisch gekrümmten Teil der Fläche reell auftreten.

5a. Die **Hauptkrümmungslinien** der Fläche $F(x, y, z) = 0$ sind bestimmt durch die Differentialgleichungen

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = 0 \text{ mit } \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ dF_1 & dF_2 & dF_3 \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0.$$

5b. für die Fläche $z = f(x, y)$ sind sie bestimmt durch

$$dz = p\,dx + q\,dy \text{ mit } \begin{vmatrix} p & q & 1 \\ dp & dq & 0 \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0.$$

Deren Projektionen in die z-Ebene sind gegeben durch

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 [pqt - s(1+q^2)] + \frac{dy}{dx}[t(1+p^2) - r(1+q^2)] + [s(1+p^2) - pqr] = 0.$$

Im Verein mit der Flächengleichung sind damit die Kurven selbst bestimmt.

6. **Konfokale Flächen** $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0$ zweiten Grades. Sie bilden ein dreifach orthogonales Flächensystem, d. h. durch jeden Punkt gehen drei zueinander senkrechte Flächen; sie schneiden sich gegenseitig in Krümmungslinien.

Wenn $a > b > c$, so erhält man für

$\lambda > -c^2$ Ellipsoide,
$-c^2 > \lambda > -b^2$ einschalige Hyperboloide,
$-b^2 > \lambda > -a^2$ zweischalige Hyperboloide,
$\lambda < -a^2$ imaginäre Flächen.

7a. Die **Asymptotenkurven** der Fläche $F(x, y, z) = 0$ sind bestimmt durch die Differentialgleichungen

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = 0 \quad \text{mit} \quad dF_1 \cdot dx + dF_2 \cdot dy + dF_3 \cdot dz = 0.$$

7b. für die Fläche $z = f(x, y)$ sind sie bestimmt durch

$$dz = p\,dx + q\,dy \quad \text{mit} \quad dp \cdot dx + dq \cdot dy = 0.$$

Deren Projektionen in die z-Ebene sind gegeben durch

$$t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2s\frac{dy}{dx} + r = 0.$$

Im Verein mit der Flächengleichung sind damit die Kurven selbst bestimmt.

8. Ist die Indikatrix für P_0 ein Kreis, so ist dieser Punkt ein **Nabelpunkt**; in ihm gibt es unendlich viele Krümmungslinien. Für ihn gilt

$$\left.\begin{array}{r} pq : (p^2+1) : (q^2+1) = s : r : t \\ z = f(x, y) \end{array}\right\}.$$

9. Auf der Ebene ist jede Kurve eine Asymptotenlinie oder Krümmungslinie. Auf der Kugel ist jede Kurve Krümmungs-

linie. Auf einer Regelfläche sind die Asymptotenlinien die erzeugenden Geraden. Auf einer abwickelbaren Fläche ist die Erzeugende und die zu ihr senkrechte Trajektorie Krümmungslinie. Auf einer Rotationsfläche sind die Meridiane und Parallelkreise Krümmungslinien.

10. **Geodätische Linie** zwischen zwei Punkten einer Fläche ist die Linie kürzesten Weges zwischen diesen beiden Punkten auf der Fläche.

Eine geodätische Linie auf einer bestimmten Fläche ist durch zwei ihrer Punkte oder durch einen Punkt und Fortschreitungsrichtung in diesem Punkt bestimmt.

Ist die Fläche abwickelbar, so wird die geodätische Linie der Fläche als Gerade mit abgewickelt. So ist z. B. die Schraubenlinie eine geodätische Linie des Zylinders.

Geodätischer Abstand zweier Flächenpunkte ist der durch beide Punkte bestimmte geodätische Bogen.

Geodätischer Kreis um einen festen Punkt P_0 der Fläche ist der geometrische Ort der Punkte gleichen geodätischen Abstands von P_0.

Geodätisches Dreieck ist das durch drei geodätische Bögen bestimmte Dreieck.

§ 126. Enveloppe von Flächen und Raumkurven. Durch eine Raumkurve definierte abwickelbare Flächen.

1. **Enveloppe eines Kurvensystemes**

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, t) &= 0 \\ G(x, y, z, t) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ist der geometrische Ort der aufeinanderfolgenden Schnittpunkte — solange solche vorhanden sind — von zwei unendlich benachbarten Kurven. Die Einzelkurven selbst heißen **Eingehüllte.**

2. **Enveloppe eines Flächensystems** $F(x, y, z, t) = 0$ ist der geometrische Ort der aufeinanderfolgenden Schnittkurven von zwei unendlich benachbarten Flächen. Die Einzelflächen selbst heißen **Eingehüllte.**

3. Die Enveloppe des Flächensystems $F(x, y, z, t) = 0$ ist das Eliminationsresultat von t aus den beiden Gleichungen

$$F(x, y, z, t) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial t} = 0.$$

4. Je zwei unendlich benachbarte Flächen des Systems $F(x, y, z, t) = 0$ schneiden sich in der **Charakteristik** dieser Einzelflächen. Längs derselben berühren sich Einhüllende und Eingehüllte.

5. Je drei unendlich benachbarte Flächen des Systems $F(x, y, z, t) = 0$ schneiden sich in Punkten, deren stetige Aufeinanderfolge die **Rückkehrkante** der Enveloppe bildet. Ihre Gleichung ist das Eliminationsresultat von t aus den Gleichungen

$$F(x, y, z, t) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0.$$

6. Die Rückkehrkante wird von allen Charakteristiken der Fläche berührt.

7. Die aufeinanderfolgenden Schmiegungsebenen einer Raumkurve bestimmen eine abwickelbare Fläche (siehe § 112, 3) als ihre Enveloppe. Je zwei aufeinanderfolgende Schmiegungsebenen schneiden sich in der Tangente des Kurvenpunktes, d. i. die Charakteristik dieser Schmiegungsebenen. Die abwickelbare Fläche heißt die **Tangentialfläche** der Raumkurve. Die Raumkurve selbst ist die Rückkehrkante der Tangentialfläche. Sie ist ferner die Enveloppe der Kurventangenten.

8. Gleichung der Tangentialfläche.

$$\frac{X - x}{\cos\alpha} = \frac{Y - y}{\cos\beta} = \frac{Z - z}{\cos\gamma},$$

worin $x, y, z, \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ Funktionen des Parameters sind (siehe § 121); X, Y, Z sind die laufenden Koordinaten der Tangentialfläche.

9. Jedes Ebenensystem bestimmt eine abwickelbare Fläche als Enveloppe dieser Ebenen. Ihre Charakteristiken sind Tangenten an die Rückkehrkante der Fläche. Die Fläche selbst ist dann der Ort dieser Tangenten.

10. Die aufeinanderfolgenden Normalebenen einer Raumkurve definieren eine abwickelbare Fläche, die Enveloppe dieser

Normalebenen: die **Polarfläche** oder Fläche der Normalebenen oder Fläche der Krümmungsaxen. Je zwei aufeinanderfolgende unendlich benachbarte Normalebenen schneiden sich in der Krümmungsaxe der Raumkurve, d. i. in der Charakteristik der Normalebenen. Die Rückkehrkante der Polarfläche ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln.

11. Die aufeinanderfolgenden Rektifikationsebenen einer Raumkurve definieren eine abwickelbare Fläche, die Enveloppe dieser rektifizierenden Ebenen; sie heißt die **rektifizierende Fläche** der Raumkurve.

12. Wickelt man eine abwickelbare Fläche ab, so wird die Rückkehrkante mit abgewickelt und alsdann als ebene Kurve in ihrer wahren Größe (= rektifiziert) erscheinen.

13. Die rektifizierende Fläche der Schraubenlinie $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $z = ct$ ist der Kreiszylinder vom Radius r. Wickelt man ihn ab, so wird die Schraubenlinie als Gerade rektifiziert (siehe § 123).

§ 127. Parameterdarstellung der Flächen. Linien- und Flächenelement.

1. Durch die Darstellung

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \\ z &= \chi(u, v) \end{aligned}\right\} \text{ einer Fläche}$$

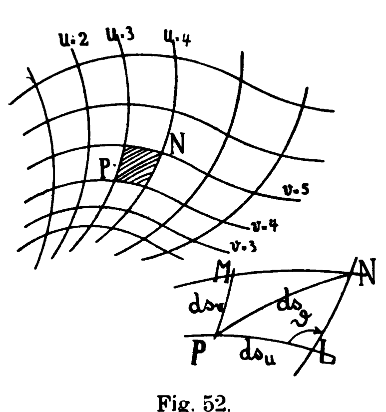


Fig. 52.

wird jedem Parameterpaar u|v ein bestimmter Punkt P der Fläche zugeordnet. Man bezeichnet daher u und v als (krummlinige) **Koordinaten** von P **auf der Fläche.** (Punkt P hat auf dieser Fläche zwei Freiheitsgrade). Die Kurven u = const, v = const. bilden zwei verschiedene Systeme von Kurven auf der Fläche, Fig. 52.

2. Der untersuchte Punkt P hat die Flächenkoordinaten $u|v$, irgend ein unendlich benachbarter N hat die Koordinaten $u + du|v + dv$; die kartesischen Koordinaten von P sind $x|y|z$, die von N sind $x + dx|y + dy|z + dz$.

3. Die speziell auf den Kurven $v = \text{const.}$ bezw. $u = \text{const.}$ liegenden zu P unendlich benachbarten Punkte L and M haben die Flächenkoordinaten $u + du|v$ bezw. $u|v + dv$.

4. Es bezeichnen φ_1, φ_2 usw. die partiellen Ableitungen von φ, ψ, χ, d. i. von x, y, z nach u und v, ferner

$$\left.\begin{aligned} E &= \varphi_1^2 + \psi_1^2 + \chi_1^2 \\ F &= \varphi_1\varphi_2 + \psi_1\psi_2 + \chi_1\chi_2 \\ G &= \varphi_2^2 + \psi_2^2 + \chi_2^2 \end{aligned}\right\} \text{ Gaußsche } \textbf{Abkürzungen.}$$

5. Der unendlich kleine Abstand PN, das **Linienelement** der Fläche, ist gegeben durch

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

oder mit Einführung von

$$PL = ds_u = du\sqrt{E},$$

$$PM = ds_v = dv\sqrt{G},$$

$$ds^2 = ds_u^2 + ds_v^2 + 2ds_u\,ds_v\cos\vartheta.$$

6. Das unendlich kleine Parallelogramm PLNM, das **Flächenelement**, ist bestimmt wegen

$$\cos\vartheta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$$

durch $$dw = ds_u\,ds_v\sin\vartheta = du\,dv\sqrt{EG - F^2}.$$

7. Das **Oberflächenstück** O zwischen den Kurven $u = u_1$, $u = u_2$, $v = v_1$, $v = v_2$ ist

$$O = \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} dv\sqrt{EG - F^2}.$$

8. Zwei beliebige von P ausgehende Kurven auf der Fläche, die die Richtungskoeffizienten $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$, bezw. $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$ haben, bilden mit einander den Winkel

$$\cos\vartheta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$$

$$= \frac{E\,du_1\,du_2 + F(du_1\,dv_2 + du_2\,dv_1) + G\,dv_1\,dv_2}{ds_1\,ds_2}.$$

9. Sollen die Kurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ **Orthogonalkurven** auf der Fläche sein, so muß F identisch verschwinden. Die Flächenelemente sind dann Rechtecke.

10. Erfüllen die Kurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ neben $F = 0$ auch noch die Bedingung $E = G$, so heißen die Systeme dieser Kurven **isotherm orthogonal.** Die Flächenelemente sind dann Quadrate.

§ 128. Abbildung von Flächen.

1. Hat man zwei Flächen

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{array}\right\} \text{ und } \left.\begin{array}{l} x' = \Phi(u', v') \\ y' = \Psi(u', v') \\ z' = X(u', v') \end{array}\right\},$$

und ordnet man durch ein Gesetz jedem Punkt der einen Fläche einen bestimmten Punkt der zweiten Fläche zu, d. h. jedem Wertepaar $u|v$ der einen Fläche ein bestimmtes Wertepaar $u'|v'$ der zweiten, so hat man die erste Fläche auf die zweite **abgebildet** und umgekehrt.

Jedem Punkt der ersten Fläche entspricht ein bestimmter Punkt der zweiten, jedem Gebilde der ersten Fläche (Gerade, Kurve, Dreieck usw.) ein bestimmtes Gebilde der zweiten Fläche.

2. Diese Zuordnung ist gegeben allgemein durch

$$F(u, v, u', v') = 0 \quad \text{mit} \quad G(u, v, u', v') = 0;$$

speziell durch

$$\left.\begin{array}{l} u' = f(u, v) \\ v' = g(u, v) \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{l} u = F(u', v') \\ v = G(u', v') \end{array}\right\},$$

meist wie in den nachfolgenden Beispielen durch $u = u'$, $v = v'$.

3. **Konforme oder winkeltreue Abbildung.** Je zwei Kurven der ersten Fläche schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie ihre Abbildungen auf der zweiten Fläche. Die Flächenelemente dw und dw' sind einander ähnlich, also Bedingung für diese Abbildung

$$E : F : G = E' : F' : G'.$$

4. **Flächentreue Abbildung.** Die Flächenelemente dw und dw′ sind einander gleich, also Bedingung für diese Abbildung

$$EG - F^2 = E'G' - F'^2.$$

5. Ist die Abbildung flächentreu und winkeltreu, so sind die beiden Flächen auf einander abwickelbar; Bedingung für diese Abbildung

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'.$$

6. Die **stereographische Projektion** ist eine spezielle winkeltreue Abbildung: Eine Kugel vom Durchmesser 2 wird durch Vektoren, die von einem festen Punkt der Kugelfläche ausgehen, auf die diesem festen Punkt diametral gegenüberliegende Tangentialebene abgebildet und umgekehrt, Fig. 53.

7. Die **Abbildung durch reziproke Radien** ist eine spezielle winkeltreue Abbildung. Durch stereographische Projektion wird zunächst die Ebene E auf die Kugel abgebildet, diese selbst durch abermalige stereographische Projektion auf die andere Ebene E′, die zur ersten Ebene E parallel ist. Nach Fig. 53 ist rr′ = 4.

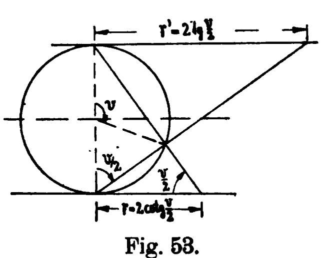


Fig. 53.

8. Die **Merkatorprojektion** ist eine spezielle flächentreue Abbildung. Jeder Punkt einer Kugelfläche wird durch horizontale Vektoren, die von der Vertikalaxe der Kugel ausgehen, auf den vertikalen Tangentialzylinder projiziert.

9. Siehe auch § 36, 4 und 5.

XI. Differentialgleichungen.

§ 129. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

1. Eine Gleichung zwischen der unabhängigen Variablen x, der davon abhängigen unbekannten Funktion y und deren Ableitungen nach x bis zur n^{ten},

$$\Phi(x, y, y', y'', \cdots y^{(n)}) = 0.$$

heißt eine **gewöhnliche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.**

2. n Gleichungen zwischen der unabhängigen Variablen x, den von x abhängigen unbekannten n Funktionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ und deren Ableitungen bilden ein **System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen (n simultane Differentialgleichungen).**

3. Die Funktion $y = f(x)$ heißt eine **Lösung** der Differentialgleichung $\Phi(x, y, y', \cdots y^{(n)}) = 0$, wenn sie dieselbe identisch erfüllt.

Enthält diese Lösung n willkürliche, voneinander unabhängige Konstante, so heißt sie eine **vollständige Lösung** der Differentialgleichung $\Phi = 0$.

4. Die Differentialgleichung $\Phi(x, y, y', y'', \cdots y^{(n)}) = 0$ besitzt stets eine **vollständige Lösung,** solange Φ eine stetige Funktion ist.

5. Eine Lösung wird **partikulär,** wenn man für die in der vollständigen Lösung auftretenden n willkürlichen Konstanten direkt oder indirekt (durch n Relationen) spezielle Zahlenwerte angibt.

6. Eine Lösung heißt **singulär,** wenn sie nicht durch Spezialisierung der Konstanten aus der vollständigen Lösung hervorgeht bezw. hervorgebracht werden kann.

7. Die Gleichung $F(x, y, C_1, C_2, \cdots C_n) = 0$ heißt **Integralgleichung** der vorgelegten Differentialgleichung

$$\Phi(x, y, y', \cdots y^{(n)}) = 0,$$

wenn sie aus dieser durch Integration hervorgeht.

8. Tritt die Integralgleichung in der Form $\Psi(x, y) = C$ auf, also nach der willkürlichen Konstanten aufgelöst, so nennt man die Funktion Ψ ein **Integral** der vorgelegten Differentialgleichung.

9. Entsprechend 4 bis 6 spricht man von vollständigen, partikulären, singulären Integralgleichungen bezw. Integralen.

10. Hat man zwischen der gesuchten Funktion y einer vorgegebenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, den $n-1$ fortlaufenden Ableitungen $y', y'', \cdots y^{(n-1)}$ und einer willkürlichen Konstanten eine Beziehung gefunden, so nennt man dieselbe ein **erstes Integral** der gegebenen Differentialgleichung.

11. Eine Differentialgleichung ist linear, wenn y und seine Ableitungen nach x in jedem Summanden nur in der ersten Dimension auftreten. x selbst darf in beliebiger Form auftreten. Die **allgemeinste lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung** ist

$$P_n y^{(n)} + P_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = 0.$$

Die P_i sind Funktionen nur von x.

Steht rechts noch eine reine Funktion P von x,

$$P_n y^{(n)} + P_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + P_1 y' + P_0 y = P,$$

so nennt man dieselbe das **zweite Glied** oder die Störungsfunktion der linearen Differentialgleichung (siehe § 134 u. 136).

§ 130. Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.

1. Die **allgemeinste Differentialgleichung erster Ordnung** ist von der Form

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \text{bezw.} \quad \Phi(x, y, y') = 0 \quad \text{oder} \quad \Phi(x, y, p) = 0,$$

wenn $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$ ist.

2. Je nach dem Grad, welchen y' in dieser Gleichung hat, unterscheidet man Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades und Differentialgleichungen erster Ordnung höheren Grades. Die allgemeinste Form der ersteren ist

$$P\,dx + Q\,dy = 0 \quad \text{bezw.} \quad y' + \varphi(x, y) = 0,$$

wenn P und Q Funktion von x und y sind.

3. Die vollständige Lösung bezw. die vollständige Integralgleichung oder das vollständige Integral der Differentialgleichung erster Ordnung sind von der Form

$$y = f(x, C) \quad \text{bezw.} \quad F(x, y, C) = 0 \quad \text{oder} \quad F(x, y) = C.$$

4. Sei $F(x, y, C)$ eine vorgelegte Integralgleichung, so findet man deren Differentialgleichung als Eliminationsresultat von C aus der gegebenen Gleichung und ihrer Ableitung nach x, also aus

$$F(x, y, C) = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0.$$

5. **Geometrische Deutung** der Differentialgleichung erster Ordnung. Man definiert als **Linienelement** an der Stelle $P_0 = x_0|y_0$ eine unendlich kleine Strecke dortselbst von bestimmter Richtung. Das Linienelement hat in der Ebene drei Freiheitsgrade; man braucht zu seiner Darstellung also drei Zahlen: x und y, um seinen Ort, und y', um seine Richtung an diesem Ort anzugeben. In der Ebene gibt es ∞^3 Linienelemente. Eine Gleichung $\Phi(x, y, y') = 0$ definiert ∞^2 Linienelemente, indem sie jedem Ort $x|y$ eine bestimmte Richtung y' zuweist, falls sie vom ersten Grad in y' ist, und k Richtungen, falls sie vom k^{ten} Grad in y' ist. Also stellt $\Phi = 0$ ein Kurvensystem, eine Kurvenschar bezw. k Kurvensysteme, k Kurvenscharen vor. Durch jeden Punkt geht eine Kurve bezw. gehen k Kurven oder Kurvenäste je nach dem Grad, in dem y' auftritt.

Durch eine weitere Beziehung $\Psi(x, y, y') = 0$ wird dem Linienelement noch ein Freiheitsgrad genommen. Der Verein von $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$ greift also ∞^1 Linienelemente heraus. Ist diese zweite Beziehung $\Psi = 0$ nur der analytische Ausdruck dafür, daß einem bestimmten x_0 ein bestimmtes y_0 oder y_0'

oder einem bestimmten y_0 ein bestimmtes x_0 bezw. y_0' zugewiesen ist, so nennt man es eine **Anfangsbedingung.**

Durch die Differentialgleichung $\Phi(x, y, y') = 0$ und die Anfangsbedingung wird also eine Kurve bezw. eine endliche Anzahl von Kurven — je nach dem Grad von y' — bestimmt.

6. Die Differentialgleichung $\Phi(y') = 0$ stellt die Richtung y' des Linienelementes als unabhängig von x und y dar, definiert also ein System von parallelen Geraden bezw. k Systeme paralleler Geraden.

7. Die Differentialgleichung $\Phi(x, y') = 0$ stellt die Richtung y' des Linienelementes als unabhängig von y dar, definiert also ein System bezw. k Systeme von kongruenten Kurven. Hat man eine Kurve, so erhält man durch Verschiebung derselben in der y-Richtung alle übrigen.

Die Integralgleichung lautet $F(x, y + C) = 0$.

8. Entsprechend ist $F(x + C, y) = 0$ die Lösung der Differentialgleichung $\Phi(y, y') = 0$. Alle Kurven der vollständigen Lösung erhält man durch Verschiebung einer partikulären Kurve in der x-Richtung.

9. Ist die Differentialgleichung von der Form $\Phi\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0$, so nennt man sie eine **homogene Differentialgleichung erster Ordnung.** Die Richtung y' des Linienelementes ist nur abhängig von $\frac{y}{x}$, d. h. auf einem bestimmten Radiusvektor vom Ursprung aus hat das Linienelement konstante Richtung. Die homogene Differentialgleichung $\Phi\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0$ stellt ein System ähnlicher und ähnlich gelegener Kurven (homothetische Kurven) vor (Fig. 54).

10. Die Differentialgleichung erster Ordnung k^{ten} Grades weist jedem Punkt der Ebene k Fortschreitungsrichtungen — Linienelemente — zu. Dieselben können alle oder teilweise reell oder imaginär sein. In bestimmten Punkten der Ebene fallen zwei oder mehrere

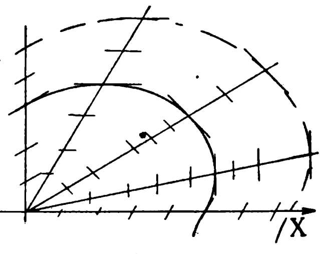


Fig. 54.

dieser Linienelemente zusammen: der geometrische Ort dieser Punkte ist die **Diskriminantenkurve.** Deren Gleichung ist

$$D(x, y) = 0,$$

falls $D(x, y)$ die Diskriminante der Differentialgleichung, d. i. die Resultante der Differentialgleichung und ihrer Ableitung nach y' ist (§ 38, 7 und 8). Für die gegebene Differentialgleichung $\Phi(x, y, y') = 0$ erhält man $D(x, y)$ als Eliminationsresultat von y' aus

$$\Phi(x, y, y') = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi(x, y, y')}{\partial y'} = 0.$$

Speziell ist die Diskriminantenkurve

$$Q^2 - 4PR = 0 \quad \text{von} \quad Py'^2 + Qy' + R = 0,$$

$$27Q^2 + 4P^3 = 0 \quad \text{von} \quad y'^3 + Py' + Q = 0,$$

$$4R^3Q - R^2P^2 - 18PQR + 4P^3 + 27Q^2 = 0$$

$$\text{von} \quad y'^3 + Ry'^2 + Py' + Q = 0,$$

wo P, Q, R Funktionen von x und y sind.

Das Gebiet r reeller Fortschreitungsrichtungen wird durch die Diskriminantenkurve vom Gebiet s reeller Fortschreitungsrichtungen getrennt.

11. Ein Kurvensystem kann durch eine Integralgleichung $F(x, y, C) = 0$ oder durch eine Differentialgleichung $\Phi(x, y, y') = 0$ gegeben sein. Die **singuläre Lösung** dieser Differentialgleichung oder die **Enveloppe** des durch diese Gleichung bestimmten Kurvensystems ist der geometrische Ort der Schnittpunkte der aufeinanderfolgenden unendlich benachbarten Einzelkurven.

In den Punkten der Enveloppe müssen je zwei der durch die Differentialgleichung bestimmten Fortschreitungsrichtungen zusammenfallen. Die Enveloppe ist also ein spezieller Fall der Diskriminantenkurve.

12. Ist das Kurvensystem durch die Integralgleichung $F(x, y, C) = 0$ gegeben, so ist die Gleichung der Enveloppe $D(x, y) = 0$, wenn $D(x, y)$ das Eliminationsresultat von C aus den Gleichungen

$$F(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0 \quad \text{ist.}$$

13. Ist das Kurvensystem durch die Differentialgleichung $\Phi(x, y, y') = 0$ gegeben, so kann das Eliminationsresultat $D(x, y) = 0$ aus den Gleichungen

$$\Phi(x, y, y') = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi(x, y, y')}{\partial y'} = 0$$

die Enveloppe darstellen. $D(x, y) = 0$ wird die gesuchte Enveloppe sein, wenn die Fortschreitungsrichtung im Punkt $x|y$ dieser Kurve dieselbe ist wie die durch die Differentialgleichung an dieser Stelle vorgeschriebene. (Über Enveloppe usw. siehe auch § 90).

14. Die Differentialgleichung erster Ordnung ersten Grades hat weder Enveloppe noch Diskriminantenkurve.

15. Das Raumkurvensystem

$$dx : dy : dz = P(x, y, z) : Q(x, y, z) : R(x, y, z)$$

stellt Orthogonalkurven auf einer Fläche dar, wenn

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

(Über Isogonaltrajektorien usw. siehe § 90.)

§ 131. Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung ersten Grades.

1. Die allgemeinste Differentialgleichung erster Ordnung ersten Grades ist von der Form

$$P\,dx + Q\,dy = 0 \quad \text{oder} \quad y' + \varphi(x, y) = 0,$$

wo P und Q Funktionen von x und y sind.

Eine vollständige Integralgleichung der gegebenen Differentialgleichung erhält man, wenn man diese **separieren** kann, d. h. wenn man alle x zu dx, alle y zu dy schaffen, sie also auf die Form

$$X\,dx + Y\,dy = 0$$

bringen kann, wo X bezw. Y Funktionen nur von x bezw. nur von y sind.

2. **Separierbare Differentialgleichung:** Man kann sie auf die Form bringen $X\,dx + Y\,dy = 0$. Sie ist immer dann vorhanden, wenn entweder x oder y fehlt.

$$\text{Lösung} \quad \int X\,dx + \int Y\,dy = C.$$

3. Die meisten Lösungsmethoden für Differentialgleichungen verwandeln die vorgelegte Differentialgleichung in eine separierbare.

4. **Homogene Differentialgleichung.** Sie erscheint in der Form

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

oder läßt sich in diese Form überführen. Die Substitution

$$\frac{y}{x} = z \quad \text{oder} \quad y = xz$$

und damit
$$dy = x\,dz + z\,dx$$

führt sie in eine separierbare Gleichung zwischen x und z über, nämlich in

$$dx\,[\varphi(z) + z\,\psi(z)] + x\,\psi(z)\,dz = 0.$$

$$\text{Lösung} \quad x = Ce^{-\int \frac{\psi(z)\,dz}{\varphi(z) + z\,\psi(z)}}.$$

Dann noch
$$z = y : x \quad \text{(siehe § 130, 9).}$$

5. **Lineare Differentialgleichung** $\frac{dy}{dx} + Xy = V$,

wo X und V Funktionen **nur** von x sind. V ist das **zweite Glied** der linearen Differentialgleichung (siehe § 129, 11).

a) Man setzt

$$y = uv, \quad \text{also} \quad dy = v\,du + u\,dv,$$

und verfügt über die eine der neuen Variablen u (oder v) derart, daß die neue Gleichung

$$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} + Xuv = V$$

$$\text{oder} \quad v\left(\frac{du}{dx} + Xu\right) + u\frac{dv}{dx} = V$$

einfacher wird. Setzt man

$$\frac{du}{dx} + Xu = 0,$$

$$\text{so wird} \quad u\frac{dv}{dx} = V.$$

Aus diesen beiden separierbaren Gleichungen erhält man

$$u = e^{-\int X\,dx} \quad \text{und} \quad v = \int V \cdot e^{\int X\,dx}\,dx + C,$$

also Lösung $\qquad y = uv = \left[\int V \cdot e^{\int X\,dx}\,dx + C\right] e^{-\int X\,dx}.$

b) Man löst zuvor die Gleichung ohne zweites Glied $\frac{dy}{dx} + Xy = 0$ und findet $y = Ce^{-\int X\,dx}$.

Die Substitution **(Variation der Konstanten)**

$$y = z \cdot e^{-\int X\,dx}$$

in die gegebene Differentialgleichung gibt

$$z = \int V \cdot e^{\int X\,dx}\,dx + C,$$

also Lösung $\qquad y = z \cdot e^{-\int X\,dx}.$

6. **Bernoullische Gleichung** $\frac{dy}{dx} + Xy = Vy^n$.

Sie läßt sich durch die Substitution $y^{1-n} = z$ auf die vorige Form

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)Xz = (1-n)V$$

bringen und hat dann als Lösung

$$y^{1-n} = \left[(1-n)\int V \cdot e^{(1-n)\int X\,dx}\,dx + C\right] e^{(n-1)\int X\,dx}.$$

7. **Totales oder exaktes Differential.** Ist $P\,dx + Q\,dy = 0$ aus $F(x, y) = C$ dadurch hervorgegangen, daß man von der letzten Gleichung das totale Differential

$$F_1\,dx + F_2\,dy = 0$$

bildete, so muß

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

sein. Das Integral der vorliegenden Differentialgleichung ist dann

$$F(x, y) = C.$$

a) Man erhält $F(x, y)$ aus P bezw. Q durch partielles Integrieren nach x bezw. y und nachheriges Vergleichen.

$$F = \int P\,dx + \varphi(y),$$

$$\text{und}\quad F = \int Q\,dy + \psi(x).$$

Die beiden zunächst noch unbestimmten Funktionen $\varphi(y)$ und $\psi(x)$ bestimmen sich durch Vergleich der beiden für F gefundenen Werte.

b) Formel $$C = \int P\,dx + \int \left[Q - \int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\right] dy;$$

oder $$C = \int Q\,dy + \int \left[P - \int \frac{\partial Q}{\partial x}\,dy\right] dx.$$

8. Ist $P\,dx + Q\,dy = 0$ kein exaktes Differential, so gibt es Faktoren $\mu(x, y) = \mu$ derart, daß durch Multiplikation mit ihnen die vorliegende Gleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$ zu einem exakten Differential wird. μ heißt dann der **integrierende Faktor** dieser Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$.

Der integrierende Faktor μ ist bestimmt durch

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Hat man μ gefunden, so ist

$$\mu P\,dx + \mu Q\,dy = 0$$

ein totales Differential.

9. Die separierbare Gleichung $X_1 Y_1\,dx + X_2 Y_2\,dy = 0$ — wo X und Y Funktionen nur von x bezw. y sind — hat als integrierenden Faktor

$$\mu = 1 : Y_1 X_2.$$

10. Die homogene Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$ — P und Q sind Funktionen von $\frac{y}{x}$ — hat als integrierenden Faktor

$$\mu = 1 : (Px + Qy).$$

11. Weiß man, daß μ die Variabeln x und y in bestimmter Zusammensetzung enthält, so kann man daraus oft sehr einfach μ

berechnen. Es geht die μ bestimmende partielle Differentialgleichung

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

über in die totale

a) $\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx$, falls $\mu=f(x)$;

b) $\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dy$, falls $\mu=f(y)$;

c) $\frac{d\mu}{\mu}=\frac{-1}{Px-Qy}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dz$, falls $\mu=f(x\cdot y)=f(z)$;

d) $\frac{d\mu}{\mu}=\frac{-x^2}{Px+Qy}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dz$, falls $\mu=f\left(\frac{y}{x}\right)=f(z)$;

e) $\frac{d\mu}{\mu}=\frac{-1}{2(Py-Qx)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dz$, falls $\mu=f(x^2+y^2)=f(z)$.

12. Ist μ ein integrierender Faktor, dann auch $\mu\cdot\Phi(F)$, wo Φ eine beliebige Funktion von $F=F(x, y)$ ist.

Hat man zwei integrierende Faktoren μ_1 und μ_2, so ist $\frac{\mu_1}{\mu_2}=C$ das Integral der gegebenen Differentialgleichung.

13a. Die Differentialgleichung $G_1\,dx+G_2\,dy=0$, wo

$$G_1=a_1x+b_1y+c_1 \quad \text{und} \quad G_2=a_2x+b_2y+c_2,$$

wird unter der Voraussetzung: $a_1b_2-a_2b_1$ von Null verschieden, durch die Substitution

$$x=\xi+x_0,\quad y=\eta+y_0$$

homogen. Dabei ist

$$x_0:y_0:1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=(b_1c_2-b_2c_1)$$
$$:(c_1a_2-c_2a_1):(a_1b_2-a_2b_1).$$

Die neue Gleichung ist dann

$$(a_1\xi+b_1\eta)\,d\xi+(a_2\xi+b_2\eta)\,d\eta=0.$$

b) Ist $a_1b_2-a_2b_1=0$, so substituiert man

$$a_1x+b_1y=z,$$

und erhält durch Elimination von x eine separierbare Gleichung zwischen y und z.

14. Die Gleichung

$$(\varphi - y\chi)\,dx + (\psi + x\chi)\,dy = 0,$$

wo φ, ψ, χ homogen in x und y sind, φ und ψ auch noch gleichen Grades, geht durch die Substitution $y = xz$ in eine Bernoullische Differentialgleichung über (siehe 6).

15. Siehe auch Lösung von Differentialgleichungen mit Reihen § 138.

§ 132. Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung höheren Grades.

1. Meist führt die Substitution $dy = p\,dx$ bezw. $dx = \frac{dy}{p}$, wo $p = \frac{dy}{dx} = y'$ ist, zum Ziel. Fast alle Lösungen erscheinen in Parameterdarstellung mit p als Parameter, d. h. x und y sind simultan dargestellt als Funktionen von p.

2. **x und y fehlen:** $\Phi(p) = 0$.
Die Wurzeln dieser Gleichung seien $p_1, p_2 \cdots p_n$. Dann stellen die Lösungen

$$y = p_1 x + C, \quad y = p_2 x + C, \cdots \quad y_n = p_n x + C$$

Systeme paralleler Geraden dar (siehe § 130. 6).

3. **x fehlt:** $\Phi(y, p) = 0$.
Man kann auflösen a) nach p, b) nach y.

a) $p = \varphi(y) = \frac{dy}{dx}$.

$$\text{Lösung} \quad x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + C.$$

b) $y = f(p)$, also $dy = f'(p)\,dp = p\,dx$.

$$\text{Lösung in Parameterdarstellung} \begin{cases} x = \int \frac{f'(p)\,dp}{p} + C \\ y = f(p). \end{cases}$$

4. **y fehlt:** $\Phi(x, p) = 0$.
Man kann auflösen a) nach p, b) nach x.

a) $p = \varphi(x) = \frac{dy}{dx}$.

Lösung $y = \int \varphi(x)\,dx + C$.

b) $x = f(p)$ oder $dx = f'(p)\,dp = \frac{dy}{p}$.

Lösung in Parameterdarstellung $\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int f'(p)\,p\,dp + C. \end{cases}$

5. Die Variabeln kommen **homogen** vor: $\Phi\left(\frac{y}{x}, p\right) = 0$.

Man kann auflösen a) nach p, b) nach $\frac{y}{x}$.

a) $p = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{dy}{dx}$, siehe § 131, 4.

b) $\frac{y}{x} = f(p)$ oder $y = x\,f(p)$ siehe 6a oder 6b.

Man differenziert auf beiden Seiten nach x und erhält dann eine separierbare Gleichung zwischen x und p

$$\frac{dx}{x} = \frac{f'(p)\,dp}{p - f(p)} = P\,dp.$$

Lösung in Parameterdarstellung $\begin{cases} x = Ce^{\int P\,dp} \\ y = x\,f(p). \end{cases}$

6. $y = \Phi(x, p)$.
a) Man differenziert auf beiden Seiten nach x.

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\,\frac{dp}{dx}.$$

Diese neue Differentialgleichung zwischen p und x ist eventuell integrierbar; alsdann hat man durch deren Integralgleichung

$\left.\begin{array}{l} F(x, p, C) = 0 \\ \text{und } y = \Phi(x, p) \end{array}\right\}$ die Lösung in der Parameterdarstellung.

Diese Integration ist immer möglich in den beiden folgenden Fällen b) und c).

b) **Allgemeine Clairautsche Gleichung**

$$y = x f(p) + \varphi(p).$$

Man differenziert nach x und erhält eine lineare Differentialgleichung zwischen x und p

$$\frac{dx}{dp} + x\frac{f'}{f - p} + \frac{\varphi'}{f - p} = 0;$$

f, f' und φ' statt f(p), f'(p) und $\varphi'(p)$.

Deren Integralgleichung ist

$$x = \left[\int \frac{\varphi'}{p - f} e^{\int \frac{f' dp}{f - p}} dp + C\right] e^{-\int \frac{f' dp}{f - p}} = F(p, C).$$

Lösung in Parameterdarstellung $\begin{cases} x = F(p, C) \\ y = x f + \varphi. \end{cases}$

c) **Spezielle Clairautsche Gleichung**

$$y = px + \varphi(p).$$

Die Ableitung nach x gibt

$$[x + \varphi'(p)]\, dp = 0.$$

Man erhält durch Nullsetzen eines jeden der beiden Faktoren zwei Lösungen; die eine

$$p = C \text{ mit } y = px + \varphi(p)$$

oder

$$y = Cx + \varphi(C)$$

stellt eine Geradenschar dar; die andere

$$x + \varphi'(p) = 0 \text{ mit } y = px + \varphi(p)$$

in Parameterform eine Einzelkurve, die singuläre Lösung oder Enveloppe der gefundenen Geradenschar.

7. Siehe auch Lösung von Differentialgleichungen mit Reihen, § 138.

§ 133. Gewöhnliche Differentialgleichung zweiter und höherer Ordnung.

1. Die allgemeinste Differentialgleichung zweiter Ordnung ist von der Form $\Phi(x, y, y', y'') = 0$.

Hinsichtlich der Lösung speziell unterscheidet man die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung von der nichtlinearen (siehe § 129, 11).

2. **Geometrische Deutung** der Differentialgleichung zweiter Ordnung. Man definiert als **Krümmungselement** an der Stelle $P_0 = x_0|y_0$ einen unendlich kleinen Kurvenbogen von bestimmter Fortschreitungsrichtung und bestimmter Krümmung. Das Krümmungselement hat also an der Stelle $x_0|y_0$ zwei Freiheitsgrade, in der Ebene vier. Man braucht zu seiner Darstellung in der Ebene vier Zahlen (seine „Koordinaten"): x und y, um seinen Ort, y' und y'', um seine Richtung und Krümmung anzugeben. In der Ebene gibt es ∞^4 Krümmungselemente. Eine Gleichung $\Phi(x, y, y', y'') = 0$ definiert ∞^3 Krümmungselemente: in jedem Punkt gibt es noch ∞^1 Krümmungselemente, d. h. $\Phi(x, y, y', y'') = 0$ bestimmt durch jeden Punkt ∞^1 Kurven, in der ganzen Ebene ∞^2 Kurven.

3. **Mechanische Deutung** der Differentialgleichung zweiter Ordnung. Deutet man x als Zeit, y als Weg, so stellt

$$\Phi(x, y, y', y'') = 0$$

eine Relation dar zwischen dem augenblicklichen Zeitpunkt der Untersuchung, dem vom materiellen Punkt zurückgelegten Weg, seiner augenblicklichen Geschwindigkeit und der im gleichen Zeitpunkt auf ihn einwirkenden Kraft. Speziell stellt die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = P$$

ein Schwingungsproblem dar.

4. Die vollständige Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung bezw. die vollständige Integralgleichung enthält zwei voneinander unabhängige willkürliche Konstante.

5. Die Differentialgleichung eines Systems $F(x, y, C_1, C_2) = 0$, welches ∞^2 Kurven in der Ebene bestimmt, ist das Eliminationsresultat von C_1 und C_2 aus den drei Gleichungen

$$F(\,) = 0, \quad dF(\,) = 0, \quad d^2F(\,) = 0.$$

6. Die allgemeinste Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ist von der Form $\Phi(x, y, y', y'', \cdots y^{(n)}) = 0$.

Man unterscheidet sie speziell hinsichtlich der Lösung als l i n e a r e und n i c h t l i n e a r e Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

7. Die vollständige Lösung einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung bezw. die vollständige Integralgleichung enthält n voneinander unabhängige willkürliche Konstante.

Die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung definiert ∞^n Kurven in der Ebene; durch jeden Punkt der Ebene gehen ∞^{n-1} Kurven.

8. Die Differentialgleichung eines Systems

$$F(x, y, C_1, C_2 \cdots C_n) = 0$$

von ∞^n Kurven in der Ebene ist das Eliminationsresultat der n Konstanten aus der gegebenen Gleichung und ihren n fortlaufenden Ableitungen nach x.

§ 134. **Lösung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.**

1 a) Die allgemeinste lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zweitem Glied ist

$$P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = P.$$

Dabei sind P_2, P_1, P_0, P Funktionen nur von x (siehe § 129,11).

Spezielle Fälle sind

b) die lineare Differentialgleichung ohne zweites Glied

$$P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = 0;$$

c) die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koëffizienten und mit zweitem Glied

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = P;$$

d) die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und ohne zweites Glied

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

2. **Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und ohne zweites Glied**

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Dazu gibt es eine **charakteristische Gleichung**

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

mit den Wurzeln λ_1 und λ_2.

Die Lösung der Differentialgleichung ist

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 .$$

y_1 und y_2 sind zwei voneinander linear unabhängige partikuläre Lösungen. Die charakteristische Gleichung hat entweder

α) zwei reelle und verschiedene oder

β) zwei gleiche oder

γ) zwei konjugiert imaginäre Wurzeln.

In jedem der drei Fälle hat man eine andere Form der Lösung.

α) λ_1 und λ_2 reell und verschieden,

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$$

β) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$,

$$y = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x);$$

γ) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$,

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

3. Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und mit zweitem Glied.

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = P \ldots . (a_2 = 1).$$

a) Man löst zuvor die Gleichung ohne zweites Glied

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

und erhält als Lösung

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Die Substitution (**Variation der Konstanten** nach Lagrange)

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

gibt bei passender Verfügung über die Variablen u_1 und u_2 zwei separierbare Differentialgleichungen für u_1 und u_2

$$u_1' : u_2' : 1 = -Py_2 : Py_1 : (y_1 y_2' - y_2 y_1')$$

und damit die

Lösung $\quad y = u_1 y_1 + u_2 y_2.$

α) λ_1 und λ_2 sind reell und verschieden,

$$y = \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int\frac{P\,dx}{e^{\lambda_1 x}} + C_1\right)e^{\lambda_1 x} + \left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\int\frac{P\,dx}{e^{\lambda_2 x}} + C_2\right)e^{\lambda_2 x};$$

β) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$,

$$y = \left(-\int\frac{Px\,dx}{e^{\lambda x}} + C_1\right)e^{\lambda x} + \left(\int\frac{P\,dx}{e^{\lambda x}} + C_2\right)x e^{\lambda x};$$

γ) $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$

$$y = \left(-\frac{1}{\beta}\int \frac{P \sin\beta x \, dx}{e^{\alpha x}} + C_1\right) e^{\alpha x} \cos\beta x$$

$$+ \left(\frac{1}{\beta}\int \frac{P \cos\beta x \, dx}{e^{\alpha x}} + C_2\right) e^{\alpha x} \sin\beta x.$$

b) Die Gleichung $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = P$ kann nach § 136,8 — Methode des Ansatzes — oft mit kurzer Rechnung gelöst werden.

c) Die Gleichung $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = P$ findet oft eine einfache Lösung, indem man sie als nichtlinear betrachtet und nach § 135 behandelt.

4. **Lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten**

$$P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = 0 \quad \text{und} \quad P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = P.$$

a) Sie findet oft ihre Lösung, indem man sie als nichtlinear betrachtet und nach § 135 behandelt.

b) Oft ergibt die Anwendung der Sätze § 136 eine Lösung.

c) Oft erhält man nach § 138 mit Reihenentwicklung eine Lösung.

§ 135. Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

1. Die allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung $\Phi(x, y, y', y'') = 0$ kann sich dahin spezialisieren, daß alle oder einige der Größen x, y, y' fehlen, oder daß sie in bestimmter Form auftreten.

Die Substitutionen $dy = y' dx = p dx$, $dp = y'' dx = q dx$ usw. dienen zur Elimination unbequemer Größen.

Meist löst man die Gleichung nach y'' auf.

2. $\Phi(y'') = 0$.

Man löst nach y'' auf und findet $y'' = \text{const.} = c$.

Lösung $\quad y = \frac{1}{2} c x^2 + C_1 x + C_2$.

3. $\boldsymbol{\Phi(y'', x) = 0}$ oder $y'' = \varphi(x)$.

$$y' = \int \varphi(x)\, dx + C_1.$$

Lösung $\quad y = \iint \varphi(x)\, dx\, dx + C_1 x + C_2.$

4. $\boldsymbol{\Phi(y'', y') = 0}$ oder $\Phi\left(\frac{dp}{dx}, p\right) = 0$.

a) Man kann $y'' = \varphi(y')$ oder $y'' = \varphi(p)$ auflösen;

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{p\, dp}{dy}.$$

Lösung in Parameterform
(p ist Parameter)

$$\begin{cases} x = \int \frac{dp}{\varphi(p)} + C_1 \\ y = \int \frac{p\, dp}{\varphi(p)} + C_2. \end{cases}$$

Wenn eine dieser Integralgleichungen nach p auflösbar ist, also $p = F(x, C_1)$ bezw. $p = G(y, C_2)$, ist die Lösung

$$y = \int F(x, C_1)\, dx + C_2 \quad \text{bezw.} \quad x = \int \frac{dy}{G(y, C_2)} + C_1.$$

b) Man kann $y' = \psi(y'')$ auflösen oder $p = \psi(q)$.

$$dp = \psi'(q)\, dq = q\, dx = \frac{q\, dy}{p}.$$

Lösung in Parameterform
(q ist Parameter)

$$\begin{cases} x = \int \frac{\psi'(q)\, dq}{q} + C_1 \\ y = \int \frac{\psi(q)\, \psi'(q)\, dq}{q} + C_2. \end{cases}$$

5. $\boldsymbol{\Phi(y'', y) = 0}$.

a) Man kann $y'' = \varphi(y)$ auflösen; dann ist $p\, dp = \varphi(y)\, dy$ und $p = \sqrt{2\int \varphi(y)\, dy + C_1} = \frac{dy}{dx}$.

Lösung $\quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int \varphi(y)\, dy + C_1}} + C_2.$

b) Man kann $y = \psi(y'')$ auflösen oder $y = \psi(q)$.

$$\psi'(q)\, dq = dy = \frac{p\, dp}{q}.$$

$$p = \sqrt{2\int q\, \psi'(q)\, dq + C_1}.$$

Lösung in Parameterform (q ist Parameter)
$$\left\{\begin{array}{l} x = \int \frac{\psi'(q)\,dq}{\sqrt{2\int q\,\psi'(q)\,dq + C_1}} + C_2 \\ y = \psi(q). \end{array}\right.$$

6. **$\Phi(x, y', y'') = 0$** oder $y'' = \varphi(x, y')$.

Die Umformung $dp = \varphi(x, p)\,dx$ ist eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und p. Gelingt deren Auflösung, etwa in der Form

$$F(x, p, C_1) = 0 \quad \text{oder speziell} \quad p = f(x, C_1),$$

so wird die Lösung

$$y = \int f(x, C_1)\,dx + C_2.$$

7. **$\Phi(y, y', y'') = 0$** oder $y'' = \varphi(y, y')$.

Die Umformung $p\,dp = \varphi(y, p)\,dy$ ist eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y und p. Gelingt deren Auflösung, etwa in der Form

$$F(y, p, C_1) = 0 \quad \text{oder speziell} \quad p = f(y, C_1),$$

so wird die Lösung

$$x = \int \frac{dy}{f(y, C_1)} + C_2.$$

8. **$\Phi(x, y, y', y'') = 0$ ist in y und seinen Ableitungen homogen.**

Die Substitution $y = e^{\int z\,dx}$ macht die vorliegende Gleichung zweiter Ordnung zu einer solchen erster Ordnung

$$\Psi\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Dabei ist $y' = zy$, $y'' = \left(\frac{dz}{dx} + z^2\right) y$.

9. Die Auflösung nach § 138 (Reihenentwicklung) benötigt oft nur kurze Rechnung.

§ 136.

Lösung der linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

1a) Allgemeine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (§ 129, 11) mit zweitem Glied

$$P_n y^{(n)} + P_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = P.$$

Spezialfälle sind

b) die allgemeine lineare Differentialgleichung ohne zweites Glied

$$P_n y^{(n)} + P_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = 0;$$

c) die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und mit zweitem Glied

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = P;$$

d) die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und ohne zweites Glied

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

2. Kennt man von einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ohne zweites Glied

$$P_n y^{(n)} + \cdots + P_1 y' + P_0 y = 0$$

n voneinander linear unabhängige partikuläre Lösungen y_1, $y_2, \cdots y_n$, so ist die vollständige Lösung der Gleichung

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n.$$

3. Die vollständige Lösung der linearen Differentialgleichung mit zweitem Glied (variable oder konstante Koeffizienten) ist

$$y = \eta + y_0,$$

wenn η die vollständige Lösung der Gleichung ohne zweites Glied und y_0 irgend eine partikuläre Lösung der Gleichung mit zweitem Glied ist (siehe 8 b).

4. Zur vollständigen Lösung der linearen Differentialgleichung mit zweitem Glied (variable oder konstante Koeffizienten) führt die Substitution (Variation der Konstanten)

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n,$$

wenn $y_1, y_2, \cdots y_n$ n linear voneinander unabhängige partikuläre Lösungen der Gleichung ohne zweites Glied sind (siehe 7 a).

5. Die Gleichung $P_n y^{(n)} + \cdots + P_1 y' + P_0 y = P$ wird auf eine lineare Differentialgleichung von der Ordnung $n - 1$ reduziert durch die Substitution

$$y = y_1 \int z\,dx,$$

wo y_1 eine partikuläre Lösung der gegebenen Gleichung ohne zweites Glied ist.

6. Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und ohne zweites Glied

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Dazu gibt es eine **charakteristische Gleichung**

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

mit den Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$.

Die Lösung der Differentialgleichung ist

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n.$$

$y_1, y_2, \cdots y_n$ sind n voneinander linear unabhängige partikuläre Lösungen.

Die n Wurzeln der charakteristischen Gleichung können alle oder teilweise reell oder imaginär sein.

α) Alle Wurzeln sind reell und verschieden,

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x};$$

β) zwei der Wurzeln sind gleich, die übrigen sind reell und verschieden: $\lambda_1 = \lambda_2$,

$$y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{\lambda_3 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x};$$

γ) zwei der Wurzeln sind konjugiert imaginär, die übrigen reell und verschieden: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$,

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + C_3 e^{\lambda_3 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x};$$

δ) p der Wurzeln sind gleich: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p$,

$$y = e^{\lambda_1 x}\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_p x^{p-1}\right) + \cdots + C_n e^{\lambda_n x};$$

ε) konjugiert imaginäre Doppelwurzel: $\lambda_1 = \alpha + i\beta = \lambda_2$, $\lambda_3 = \alpha - i\beta = \lambda_4$,

$$y = e^{\alpha x}\left[(C_1 + C_2 x)\cos \beta x + (C_3 + C_4 x)\sin \beta x\right] + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

7. Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und mit zweitem Glied

$$y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = P \ \ldots \ (a_n = 1).$$

a) Man löst zuvor die Gleichung ohne zweites Glied

$$y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

und findet als Lösung

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n.$$

Die Substitution (**Variation der Konstanten** nach Lagrange)

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n$$

gibt bei passender Verfügung über die Variablen $u_1, u_2, \cdots u_n$ n separierbare Differentialgleichungen für $u_1, u_2, \cdots u_n$, nämlich

$$u'_1 : u'_2 : \cdots : u'_n : 1 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots y_n & 0 \\ y'_1 & y'_2 & \cdots y'_n & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots y_n^{(n-2)} & 0 \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots y_n^{(n-1)} & -P \end{vmatrix},$$

(siehe § 37)

und damit nach Berechnung von $u_1, u_2, \cdots u_n$ als Lösung

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n .$$

Sind die Wurzeln λ_i der char. Gleichung reell und verschieden, so wird

$$u_1 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \cdots (\lambda_1 - \lambda_n)} \int \frac{P\,dx}{e^{\lambda_1 x}} + C_1 ,$$

. . . .

$$u_n = \frac{1}{(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2) \cdots (\lambda_n - \lambda_{n-1})} \int \frac{P\,dx}{e^{\lambda_n x}} + C_n .$$

b) Die Gleichung $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = P$ kann nach der Methode des Ansatzes (siehe 8b) oft mit kurzer Rechnung gelöst werden.

c) Die Gleichung $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = P$ kann man nach 5 auf eine Differentialgleichung niedrigerer Ordnung zurückführen durch die Substitution $y = y_1 \int z\,dx$, falls y_1 eine partikuläre Lösung der Gleichung ohne zweites Glied ist.

d) Oft findet die lineare Gleichung eine kurze Auflösung, wenn man sie nach § 137 als nichtlinear behandelt, oder durch Reihenentwicklung nach § 138.

8. **Lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten**

$$P_n y^{(n)} + \cdots + P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = 0$$

und $$P_n y^{(n)} + \cdots + P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = P .$$

a) Kennt man von der Gleichung ohne zweites Glied n partikuläre voneinander linear unabhängige Lösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$, so führt die Substitution

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n$$

bei passender Verfügung über die Variablen $u_1, u_2, \cdots u_n$, wenn $P_n = 1$, zu den nämlichen separierbaren Differentialgleichungen für $u'_1, u'_2, \cdots u'_n$ wie bei 7a und damit zur Auflösung der Gleichung mit zweitem Glied.

b) **Methode des Ansatzes.** Die nach 3 notwendige partikuläre Lösung y_0 findet man sehr oft von derselben Form wie das zweite Glied P. Man setzt an,

falls $P = a + bx + cx^2 + \cdots + lx^m$,
$y_0 = A + Bx + Cx^2 + \cdots + Lx^m$;

falls $P = a \sin kx + b \cos kx$,
$y_0 = A \sin kx + B \cos kx$,
oder $y_0 = A \sin (kx + \varphi)$;

falls $P = ae^{kx} + be^{-kx}$,
$y_0 = Ae^{kx} + Be^{-kx}$;

falls $P = e^{kx}(a + bx + cx^2 + \cdots)$,
$y_0 = e^{kx}(A + Bx + Cx^2 + \cdots)$;

falls $P = (a \sin kx + b \cos kx)(c + dx + ex^2 + \cdots)$,
$y = (A \sin kx + B \cos kx)(C + Dx + Ex^2 + \cdots)$.

Die Konstanten $A, B, \cdots$ bestimmen sich aus der Bedingung, daß das so angesetzte y_0 eine Lösung der Differentialgleichung mit zweitem Glied sein muß.

c) Man leitet die gegebene Differentialgleichung noch so oft ab, bis man durch Kombination dieser Ableitungen eine neue lineare Differentialgleichung ohne zweites Glied erhält. Deren Lösung enthält dann die nach 3 erforderliche partikuläre Lösung y_0. Die Konstanten von y_0 erhält man wie bei b) aus der Bedingung, daß y_0 eine Lösung der Gleichung mit zweitem Glied sein muß.

d) Die Gleichung $P_n y^{(n)} + \cdots + P_1 y' + P_0 y = P$ kann man wie bei 5 auf eine Differentialgleichung von der Ordnung

$n-1$ reduzieren durch die Substitution $y = y_1 \int z\,dx$, falls y_1 eine partikuläre Lösung der Gleichung ohne zweites Glied ist.

e) Eine Auflösung ist oft möglich, wenn man die lineare Differentialgleichung wie eine nichtlineare nach § 137 behandelt; oder indem man nach § 138 die Reihenentwicklung vornimmt.

f) Differentialgleichungen von der Form

$$(a+bx)^n y^{(n)} + (a+bx)^{n-1} a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + (a+bx)\, a_1 y' + a_0 y = P$$

werden durch die Substitution

$$a + bx = e^t$$

auf eine lineare Differentialgleichung zwischen y und t mit konstanten Koeffizienten reduziert.

$$a+bx = e^t; \quad b\,dx = e^t dt; \quad y' = b e^{-t} \frac{dy}{dt},$$

$$y'' = b^2 e^{-2t} \left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right];$$

$$y''' = b^3 e^{-3t} \left[\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right] \text{ usw.}$$

§ 137. Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

1. $y^{(n)} = C$.

Lösung $$y = \frac{Cx^n}{n!} + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + \frac{C_{n-1} x}{1!} + C_n.$$

2. $y^{(n)} = \Phi(x)$.

Lösung $$y = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{z=0}^{z=x} (x-z)^{n-1} \Phi(z)\,dz + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{C_{n-1} x}{1!} + C_n,$$

wenn man die Variable unter dem Integral und in Φ mit z bezeichnet.

3. $\Phi[y^{(n-1)}, y^{(n)}] = 0$.

Man setzt $y^{(n-1)} = z$, also $y^{(n)} = \frac{dz}{dx}$, und erhält eine separierbare Differentialgleichung

$$\Phi\left(z, \frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Gelingt deren Integration in der Form

$$z = F(x, C_1) = y^{(n-1)},$$

so ist nach 2 weiterzufahren.

4. $\Phi[y^{(n)}, y^{(n-2)}] = 0$.

Man setzt $y^{(n-2)} = z$, also $y^{(n)} = \frac{d^2 z}{dx^2} = z''$, und erhält eine Gleichung

$$\Phi(z, z'') = 0,$$

welche nach § 135, 5 zu behandeln ist.

5. $\Phi[x, y', y'', \cdots y^{(n)}] = 0$, y fehlt.

Man setzt $y' = z$, dann ist $y'' = z'$, $y''' = z''$ usw.; man erhält eine Gleichung für z, deren Ordnung $n - 1$ ist,

$$\Phi[x, z, z', z'', \cdots z^{(n-1)}] = 0.$$

6. $\Phi[x, y, y', \cdots y^{(n)}] = 0$ ist in y und seinen Ableitungen homogen. Man kann durch die Substitution

$$y = e^{\int z\, dx}$$

die Gleichung auf eine solche $n - 1^{ter}$ Ordnung zwischen x und z reduzieren.

$$y' = zy, \quad y'' = (z' + z^2)\,y, \quad y''' = y\,(z'' + 3\,zz' + z^3) \text{ usw.}$$

In der neuen Gleichung fällt $y = e^{\int z\, dx}$ hinaus.

7. Auflösung durch Differenzieren.

Die Gleichung $\Phi(x, y, y', \cdots y^{(n)}) = 0$ geht durch Differenzieren nach x in die Gleichung $\Psi(x, y, y', \cdots y^{(n)}, y^{(n+1)}) = 0$ $n + 1^{ter}$ Ordnung über. Die gleichzeitig giltigen Gleichungen $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$ ergeben eventuell durch passende Kombination eine einfachere Gleichung $F = 0$, ebenfalls $n + 1^{ter}$ Ordnung, deren einmalige Integration möglich ist und eine Gleichung $\Phi_1(x, y, y', \cdots y^{(n)}, C_1) = 0$ liefert. Die beiden Gleichungen

$\Phi(x, y, y', \cdots y^{(n)}) = 0$ und $\Phi_1(x, y, y', \cdots y^{(n)}, C_1) = 0$ ergeben nach Elimination von $y^{(n)}$ eine Gleichung $n - 1^{ter}$ Ordnung.

8. Die Auflösung nach § 138 (Reihenentwicklung) ist bei verschiedenen Gleichungen oft durch kurze Rechnung möglich.

§ 138. Lösung von Differentialgleichungen durch Reihen.

1. Die gesuchte Lösung der Differentialgleichung

$$\Phi(x, y, y') = 0$$

oder allgemein $\Phi(x, y, y', \cdots y^{(n)}) = 0$ sei

$$y = f(x).$$

Entwickelt man $y = f(x)$ in eine Potenzreihe

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

so wird die Substitution von y, sowie seiner Ableitungen

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots,$$

oder

$$y' = a_1 + \frac{2!}{1!} a_2 x + \frac{3!}{2!} a_3 x^2 + \frac{4!}{3!} a_4 x^3 + \cdots,$$

$$y'' = 2! a_2 + \frac{3!}{1!} a_3 x + \frac{4!}{2!} a_4 x^2 + \frac{5!}{3!} a_5 x^3 + \cdots,$$

$$y''' = 3! a_3 + \frac{4!}{1!} a_4 x + \frac{5!}{2!} a_5 x^2 + \frac{6!}{3!} a_6 x^3 + \cdots \text{ usw.}$$

in die gegebene Differentialgleichung, und der Vergleich nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \cdots$ bis auf einen ermöglichen, wenn die Differentialgleichung erster Ordnung war, bezw. bis auf n, wenn sie n^{ter} Ordnung war. Die unbestimmt bleibenden Koeffizienten spielen dann die Rolle der Integrationskonstanten.

2. Die gegebene Differentialgleichung ist $\Phi(x, y, y', \cdots y^{(n)}) = 0$ oder $y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \cdots y^{(n-1)})$. Man erhält die weiteren Ableitungen $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$ usw. als Funktionen von $x, y, y', \cdots y^{(n-1)}$. Legt man y und seinen Ableitungen $y', y'', \cdots y^{(n-1)}$ für $x = x_0$ die willkürlichen Werte $y_0, y_0', y_0'', \cdots y_0^{(n-1)}$ bei, so bildet die Reihe

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1!} y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''_0 + \cdots,$$

sofern sie konvergiert, die vollständige Lösung der gegebenen Differentialgleichung. Die spätern Ableitungen an der Stelle

x_0, nämlich $y_0^{(n)}$, $y_0^{(n+1)}$ usw. sind durch die vorausgehenden $y_0, y_0', \cdots y_0^{(n-1)}$ bestimmt aus der gegebenen Differentialgleichung.

§ 139. Simultane Differentialgleichungen.

1. Ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen einer unabhängigen Variablen, etwa t, und n abhängigen nebst deren ersten Ableitungen, heißt ein **System von n simultanen (gewöhnlichen) Differentialgleichungen**,

$$\text{z. B.}\quad \left.\begin{array}{l} \varphi(x, y, z, x', y', z', t) = 0 \\ \psi(x, y, z, x', y', z', t) = 0 \\ \chi(x, y, z, x', y', z, t) = 0 \end{array}\right\}.$$

2. Ein System

$$x = \Phi(t),\quad y = \Psi(t),\quad z = X(t)$$

heißt eine **Lösung** des Systems dieser simultanen Differentialgleichungen, wenn es dieses System identisch erfüllt.

3. Enthält das Lösungssystem n willkürliche, linear voneinander unabhängige Konstante, so nennt man es das **vollständige Lösungssystem** oder die **vollständige Lösung.**

4. Das System

$$F_1(x, y, z, t, C_1) = 0,\quad F_2(x, y, z, t, C_2) = 0,\quad \text{usw.}$$

heißt ein **vollständiges System von Integralgleichungen,** wenn es implizit das Lösungssystem gibt.

5. Ist das Lösungssystem nach den Konstanten aufgelöst, also $f_1(x, y, z, t) = C_1$, $f_2(x, y, z, t) = C_2$ usw., dann nennt man das System der Funktionen $f_1, f_2, \cdots$ das **vollständige System der Integrale.**

6. Eine Lösung bezw. Integralgleichung heißt **partikulär,** wenn sie durch Spezialisierung der Konstanten aus dem vollständigen System hervorgeht. Läßt sie sich nicht durch Spezialisierung aus dem vollständigen System erzeugen, so heißt sie **singulär.**

7. Ein System von n simultanen Differentialgleichungen

$$\varphi(\,) = 0),\quad \psi(\,) = 0),\cdots$$

hat immer eine vollständige Lösung, wenn die Funktionen auf den linken Gleichungsseiten stetig sind.

8. Eine einzige gewöhnliche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$\Phi(x, y, y', y'', \cdots y^{(n)}) = 0$$

ist äquivalent einem System von n simultanen Differentialgleichungen zwischen der Unabhängigen x und den n Abhängigen $y, y', y'', \cdots y^{(n-1)}$.

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, y', y'', \cdots y^{(n-1)}, y^{(n)}) &= 0, \\ y' &= \frac{dy}{dx}, \\ y'' &= \frac{dy'}{dx}, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= \frac{dy^{(n-2)}}{dx}, \end{aligned}\right\} \text{ wenn } y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}.$$

9. Ein System von m simultanen Differentialgleichungen je n^{ter} Ordnung ist äquivalent einem neuen System von $m \cdot n$ simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung. Das neue System erhält man durch Einführung der Ableitungen als neue Variable.

Wenn t die Unabhängige, x und y die Abhängigen, und $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$ als neue Variable definiert sind, so ist das System von zwei simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\left.\begin{aligned} \varphi\left((t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= 0, \\ \psi\left((t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= 0 \end{aligned}\right|$$

äquivalent dem System von vier simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\left.\begin{aligned} \varphi\left(t, x, y, x', y', \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}\right) &= 0, \\ \psi\left(t, x, y, x', y', \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}\right) &= 0, \\ x' &= \frac{dx}{dt}, \\ y' &= \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right|$$

zwischen der Unabhängigen t und den vier Abhängigen x, y, x' und y'.

10. Jedes Integral $F(x, y, z, \cdots) = C$ des Systems simultaner Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t, x, y, z, \cdots),$$
$$\frac{dy}{dt} = \psi(t, x, y, z, \cdots),$$
$$\frac{dz}{dt} = \chi(t, x, y, z, \cdots),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

oder in anderer Darstellung

$$dt = \frac{dx}{\varphi()} = \frac{dy}{\psi()} = \frac{dz}{\chi()} = \cdots,$$

befriedigt die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \varphi \frac{\partial F}{\partial x} + \psi \frac{\partial F}{\partial y} + \chi \frac{\partial F}{\partial z} + \cdots.$$

11. **Geometrische Deutung** des Systems

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(x, y, z, y', z') = 0, \\ \Psi(x, y, z, y', z') = 0, \end{array}\right\} \cdots \; y' = \frac{dy}{dx}, \; z' = \frac{dz}{dx},$$

mit x als der Unabhängigen und y und z als Abhängigen. Man definiert als **Linienelement** im Raum eine unendlich kleine Strecke von bestimmter Fortschreitungsrichtung. Zur Darstellung des Linienelementes hat man fünf Zahlenangaben notwendig, x, y, z, um den Ort, die Lage desselben anzugeben, y' und z', um seine Richtung zu bestimmen; y' und z' sind die Richtungsfaktoren der Projektionen des Linienelementes auf die z- bezw. y-Ebene.

Das Linienelement im Raum hat fünf Freiheitsgrade, in einem bestimmten Punkt zwei. Im Raum gibt es ∞^5 Linienelemente, in einem Punkt ∞^2. Das Simultansystem $\Phi = 0$ mit $\Psi = 0$ definiert ∞^3 Linienelemente: in jedem Punkte also eine endliche Anzahl. Durch das System $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$ wird jedem Raumpunkt eine bestimmte Richtung (oder mehrere) zugewiesen, im Raum also ein System von ∞^2 Raumkurven definiert (siehe hierzu Krümmungselemente § 133). Das

System dieser ∞^2 Kurven nennt man eine **Kurvenkongruenz.** Durch jeden Punkt geht dann eine bestimmte Kurve (oder mehrere), eine **partikuläre Integralkurve.**

Die Kurvenkongruenz findet ihre analytische Darstellung in dem Integralsystem zu $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, C_1, C_2) = 0, \\ G(x, y, z, C_1, C_2) = 0. \end{aligned}\right\}$$

§ 140. Lösung von simultanen Differentialgleichungen.

1. Sind die n Gleichungen

$$\left.\begin{matrix} \Phi_1(t, x, y, z, \cdots x', y', z', \cdots) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_n(t, x, y, z, \cdots x', y', z', \cdots) = 0 \end{matrix}\right\} \quad (1)$$

in den n Variablen x, y,···· und deren Ableitungen $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}, \cdots$ **linear**, so kann man nach $x', y', \cdots$ auflösen,

$$\left.\begin{matrix} x' = \varphi_1(t, x, y, z, \cdots), \\ y' = \varphi_2(t, x, y, z, \cdots), \\ \cdots\cdots\cdots \end{matrix}\right\} \quad (2).$$

Man differenziert die erste Gleichung nach t,

$$x'' = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} x' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} y' + \cdots,$$

und substituiert für die $x', y', \cdots$ die Werte aus dem System (2). Die Ableitung wiederholt man noch n — 2 mal. Man hat dann n Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x' &= \varphi_1(t, x, y, z, \cdots), \\ x'' &= \psi(t, x, y, z, \cdots) = \frac{dx'}{dt}, \\ x''' &= \chi(t, x, y, z, \cdots) = \frac{dx''}{dt}, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Das Eliminationsresultat der n — 1 Variablen y, z,···· liefert

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen x und t,

$$\Psi(t, x, x', x'', \cdots x^{(n)}) = 0, \qquad (4)$$

dessen Lösung

$$x = f(t, C_1, C_2, \cdots C_n)$$

nebst den Ableitungen $x', x'', \cdots x^{(n)}$ in (3) substituiert, die vollständige Lösung

$$\begin{aligned} x &= f(t, C_1, C_2, \cdots C_n), \\ y &= g(t, C_1, C_2, \cdots C_n), \qquad (5) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

liefert.

2. Ist die Darstellung (2) nicht möglich, so wird man die Gleichungen (1) jede $n-1$ mal differenzieren, aus den n^2 vorhandenen Gleichungen die $n-1$ Variabeln $y, z, \cdots$ nebst ihren Ableitungen irgendwie eliminieren und damit eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$\Psi(t, x, x', x'', \cdots x^{(n)}) = 0 \qquad (6)$$

erhalten, deren Lösung

$$x = f(t, C_1, C_2, \cdots C_n)$$

nebst den Ableitungen $x', x'', \cdots x^{(n)}$ und den gegebenen oder durch Differenzieren erhaltenen Gleichungen hinreicht, um die andern Funktionen $y, z, \cdots$ zu bestimmen.

3. Hat man speziell das System

$$\left.\begin{aligned} \Phi(t, x, y, x', y') = 0, \\ \Psi(t, x, y, x', y') = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

und kann man nach x' und y' auflösen,

$$\left.\begin{aligned} x' = \varphi(t, x, y), \\ y' = \psi(t, x, y), \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

so bildet man

$$x'' = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} x' + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' \qquad (9)$$

und eliminiert aus den letzten drei Gleichungen y und y'; man erhält eine Differentialgleichung zweiter Ordnung (linear, wenn das gegebene System in x und y und deren Ableitungen linear war)

$$u(t, x, x', x'') = 0,$$

deren Lösung ist

$$x = v(t, C_1, C_2).$$

Die erste Ableitung x' davon in $x' = \varphi(t, x, y)$ des Systems (8) substituiert gibt dann noch

$$y = w(t, C_1, C_2).$$

4. Kann man aber nicht nach x' und y' auflösen, so bildet man die Ableitungen der Gleichungen (7) nach t und hat dann das System

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(t, x, y, x', y') = 0, \\ \Psi(t, x, y, x', y') = 0, \\ \Phi_1(t, x, y, x', y', x'', y'') = 0, \\ \Psi_1(t, x, y, x', y', x'', y'') = 0. \end{array}\right\}$$

Das Resultat der Elimination von y, y', y'' aus ihnen gibt dann eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen x und t wie oben,

$$u(t, x, x', x'') = 0.$$

Von da ab Lösung entsprechend wie oben.

Natürlich kann man auch x, x', x'' eliminieren, um eine Gleichung

$$U(t, y, y', y'') = 0$$

zu erhalten.

§ 141. Partielle Differentialgleichungen.

1. Jede Gleichung zwischen n unabhängigen Variabeln, beliebig vielen Funktionen derselben und deren partiellen Ableitungen nach diesen Unabhängigen, heißt eine **partielle Differentialgleichung.**

Eingehender sind nur diejenigen partiellen Differentialgleichungen untersucht, die nur eine (erst noch zu bestimmende) Funktion der Unabhängigen enthalten.

2. Bezeichnet man die Unabhängigen mit x_i, die Abhängige mit y, deren erste partielle Ableitungen nach den Unabhängigen

mit p_i, die zweiten mit p_{ik}, so ist die Form der partiellen Differentialgleichung erster und zweiter Ordnung

$$\Phi(x_1, x_2, \cdots x_n, y, p_1, p_2, \cdots p_n) = 0$$

bezw. $$\Phi(x_1, x_2, \cdots x_n, y, p_1, p_2, \cdots p_n, p_{11}, \cdots p_{nn}) = 0.$$

3. Die am meisten untersuchte partielle Differentialgleichung ist diejenige zwischen zwei Unabhängigen x und y und einer Abhängigen z. Bezeichnet

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

so ist die allgemeinste partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den Unabhängigen x und y und der Abhängigen z

$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0,$$

und diejenige zweiter Ordnung

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

4. Das **allgemeine Integral** einer partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung enthält n willkürliche Funktionen.

5. Eine partielle Differentialgleichung gilt als **wesentlich gelöst,** wenn man ihre Lösung auf diejenige einer gewöhnlichen Differentialgleichung oder auf ein System von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt hat.

6. Bezüglich der Lösung teilt man die partiellen Differentialgleichungen ein in lineare und nichtlineare. Die partielle Differentialgleichung heißt **linear,** wenn sie die Ableitungen der gesuchten Funktion linear enthält.

7. **Vollständiges Integral** einer partiellen Differentialgleichung $\Phi(x_1, x_2, \cdots x_n, y, p_1, p_2, \cdots p_n)$ heißt man eine Gleichung $F(x_1, \cdots x_n, y, C_1, \cdots C_n) = 0$ derart, daß man aus ihr und den n partiellen Ableitungen von y als Eliminationsresultat der Konstanten wieder die gegebene Differentialgleichung erhält.

8. **Geometrische Deutung** von $\Phi(x, y, z, p, q) = 0$. Man definiert als **Flächenelement** im Punkt $P_0 = x_0|y_0|z_0$ ein unendliches kleines Ebenenstück mit bestimmten Richtungskoeffizienten. Zur Darstellung des Flächenelementes hat man fünf Zahlen notwendig, x, y, z, um den Ort, die Lage desselben anzugeben, p und q, um seine Richtung festzulegen. Das Flächen-

element hat fünf Freiheitsgrade im Raum, zwei in einem bestimmten Punkt. Im Raum gibt es ∞^5 Flächenelemente, in jedem Punkt ∞^2.

Die Gleichung $\Phi = 0$ definiert ∞^4 Flächenelemente, weist also jedem Punkt ∞^1 zu.

9. Das vollständige Integral von $\Phi(x, y, z, p, q) = 0$ ist von der Form

$$F(x, y, z, C_1, C_2) = 0.$$

10. Das allgemeine Integral von $\Phi = 0$ erhält man aus dem vollständigen $F(x, y, z, C_1, C_2) = 0$ als Eliminationsresultat von C_1 aus den beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} F[x, y, z, C_1, f(C_1)] &= 0, \\ \frac{\partial F[\,]}{\partial C_1} &= 0, \end{aligned}\right\}$$

wo $f(C_1)$ eine willkürliche Funktion von C_1 ist.

11. Für jede einzelne bestimmte Wahl dieser Funktion f wird das allgemeine Integral zum **partikulären Integral.** Für eine solche bestimmte Wahl stellt dann die Gleichung

$$F[x, y, z, C_1, f(C_1)] = 0$$

ein Flächensystem, und das Eliminationsresultat von C_1 aus dem obigen Gleichungspaar 10 — das partikuläre Integral — die Enveloppe der Flächen $F = 0$, eine **Integralfläche,** dar. Das allgemeine Integral ist dann durch ein Flächensystem dargestellt.

12. Das Eliminationsresultat von C_1 und C_2 aus

$$F(x, y, z, C_1, C_2) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial C_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial C_2} = 0$$

gibt das **singuläre Integral** der gegebenen partiellen Differentialgleichung, die singuläre Integralfläche.

§ 142. Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

I. Lineare Differentialgleichungen.

1. **Allgemeinste lineare partielle Differentialgleichung** zwischen n Unabhängigen x_i und der Abhängigen y

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \cdots + X_n p_n = X,$$

wo die $X_1, X_2, \cdots X_n$, X Funktionen von $x_1, x_2, \cdots x_n$, y sind. Wenn das System der n simultanen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dy}{X}$$

als vollständiges Integralsystem

$$\left.\begin{array}{l} u_1(x_1, x_2, \cdots x_n, y) = C_1, \\ u_2(x_1, x_2, \cdots x_n, y) = C_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n(x_1, x_2, \cdots x_n, y) = C_n \end{array}\right\}$$

hat, so stellt $F(C_1, C_2, \cdots C_n) = 0$ das allgemeine Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung vor, solange F eine willkürliche Funktion ist.

2. **Allgemeinste lineare partielle Differentialgleichung** zwischen den Unabhängigen x, y und der Abhängigen z

$$Pp + Qq = R \quad \text{oder} \quad P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R,$$

wo P, Q und R Funktionen von x, y und z sind.

Man sucht das vollständige Integral des Simultansystems

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Sei dasselbe
$$\left.\begin{array}{l} f_1(x, y, z) = C_1, \\ f_2(x, y, z) = C_2, \end{array}\right\}$$

so ist jede einzelne willkürliche Funktion von C_1 und C_2 ein partikuläres Integral; das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung aber

$$F[C_1, C_2] = 0 \quad \text{oder} \quad F[f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)] = 0$$

oder $f_1 = U(f_2)$, wo F bezw. U willkürliche Funktionen sind.

Die Raumkurven $f_1 = C_1$ mit $f_2 = C_2$ heißen die **Charakteristiken** der partiellen Differentialgleichung.

3. Jede einzelne willkürlich bestimmte Funktion $F = 0$ ist eine **Integralfläche.** Eine solche bestimmte Fläche, ein partikuläres Integral, erhält man durch Anfangsbedingungen, hier **Anfangskurven.** Die durch die gegebene Anfangskurve

$\left.\begin{array}{l} y = g(x) \\ z = h(x) \end{array}\right\}$ hindurchgehende Integralfläche ist das Eliminationsresultat von x, y und z aus den vier Gleichungen

$$y = g(x), \quad z = h(x), \quad f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2.$$

Die für C_1 und C_2 verbleibende Relation

$$K(C_1, C_2) = 0 \quad \text{oder} \quad K[f_1, f_2] = 0$$

ist die gesuchte Integralfläche, das gesuchte partikuläre Integral.

4. $\mathbf{Xp + Yq = Z}$ oder $X\frac{\partial z}{\partial x} + Y\frac{\partial z}{\partial y} = Z$, wo X bezw. Y, Z Funktionen nur von x bezw. y, z sind.

Vollständige Lösung des Simultansystems:

$$\int\frac{dx}{X} - \int\frac{dz}{Z} = C_1, \quad \int\frac{dy}{Y} - \int\frac{dz}{Z} = C_2.$$

Das allgemeine Integral von $Xp + Yq = Z$ ist

$$F[C_1, C_2] = 0 \quad \text{oder} \quad F\left[\int\frac{dx}{X} - \int\frac{dz}{Z}, \int\frac{dy}{Y} - \int\frac{dz}{Z}\right] = 0.$$

5. $\mathbf{ap + bq = 1.}$

Spezialfall von 4; $X = a, \quad Y = b, \quad Z = 1.$

Das allgemeine Integral

$$F[C_1, C_2] = 0 \quad \text{oder} \quad F[x - az, y - bz] = 0$$

ist die Gleichung aller **Zylinderflächen.**

6. $\mathbf{(x - x_0)p + (y - y_0)q = z - z_0.}$

Spezialfall von 4; $X = x - x_0, \quad Y = y - y_0, \quad Z = z - z_0.$

Das allgemeine Integral

$$F[C_1, C_2] = 0 \quad \text{oder} \quad F\left[\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right] = 0$$

ist die Gleichung aller **Kegelflächen** mit gemeinsamem Scheitel $x_0|y_0|z_0$.

7. $\mathbf{xp + yq = 0.}$

Spezialfall von 4; $X = x, \quad Y = y, \quad Z = 0.$

Das allgemeine Integral

$$F[C_1, C_2] = 0 \quad \text{oder} \quad F\left[z, \frac{y}{x}\right] = 0 \quad \text{oder} \quad z = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ist die Gleichung aller **Konoidflächen** mit der z-Axe als Leitgeraden und der z-Ebene als Leitebene (siehe § 112 Konoidflächen).

8. $\mathbf{yp - xq = 0.}$

Vollständige Lösung des Simultansystems:

$$x^2 + y^2 = C_1, \qquad z = C_2.$$

Das allgemeine Integral

$$F[C_1, C_2] = 0 \quad \text{oder} \quad F[x^2 + y^2, z] = 0$$

ist die Gleichung aller **Rotationsflächen** um die z-Axe als Drehaxe.

9. $\mathbf{p + z\varphi(x, y) = \Phi(x, y).}$

Vollständige Lösung des Simultansystems:

$$\left. \begin{aligned} z e^{\int \varphi dx} - \int \Phi e^{\int \varphi dx} dx &= C_1 \\ y &= C_2 \end{aligned} \right\}.$$

Allgemeines Integral:

$$F[C_1, C_2] = 0 \quad \text{oder} \quad z = \left[\int \Phi e^{\int \varphi dx} dx + f(y)\right] e^{-\int \varphi dx},$$

wo $f(y)$ eine willkürliche Funktion von y ist.

10. $\mathbf{q + z\varphi(x, y) = \Phi(x, y).}$

Vollständige Lösung des Simultansystems:

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 \\ z e^{\int \varphi dy} - \int \Phi e^{\int \varphi dy} dy &= C_2 \end{aligned} \right\}.$$

Allgemeines Integral:

$$F[C_1, C_2] = 0 \quad \text{oder} \quad z = \left[\int \Phi e^{\int \varphi dy} dy + f(x)\right] e^{-\int \varphi dy},$$

wo $f(x)$ eine willkürliche Funktion von x ist.

11. $\mathbf{xp + yq = z - \varphi(x, y).}$

Vollständige Lösung des Simultansystems:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{x} &= C_1 \\ \frac{z}{x} + \int \frac{\varphi(x, C_1 x)}{x^2} dx &= C_2 \end{aligned} \right\}.$$

Wenn das Integral $\Phi(x, C_1 x)$ gibt, so ist die allgemeine Lösung

$$F[C_1, C_2] = 0 \quad \text{oder} \quad z = x\, f\left(\frac{y}{x}\right) - x\, \Phi(x, y),$$

wo $f\left(\frac{y}{x}\right)$ eine beliebige Funktion von $\frac{y}{x}$ ist.

II. Nichtlineare Differentialgleichungen.

12. $\mathbf{z = \Phi(p, q)}$.

Vollständiges Integral:

$$F(z, u) = 0, \quad \text{wo} \quad u = x + cy.$$

Die Funktion $F(z, u) = 0$ ist die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$z = \Phi\left[\frac{dz}{du}, c\frac{dz}{du}\right].$$

13. $\mathbf{\Phi(p, q) = 0}$ oder $\mathbf{p = \varphi(q)}$.

Vollständiges Integral:

$$z = C_1 x + C_2 + y\varphi(C_1).$$

Das allgemeine Integral ermittelt man aus dem vollständigen nach § 141, 10.

14. $\mathbf{\Phi_1(x, p) = \Phi_2(y, q)}$.

Man setzt

$$\Phi_1(x, p) = C_1 \quad \text{oder} \quad p = \varphi_1(x, C_1),$$
$$\Phi_2(y, q) = C_1 \quad \text{oder} \quad q = \varphi_2(y, C_1),$$

und erhält als vollständiges Integral

$$z = \int \varphi_1 dx + \int \varphi_2 dy + C_2.$$

Daraus wie bei 13 das allgemeine Integral.

15. Die **Clairautsche Differentialgleichung**

$$z = px + qy + \varphi(p, q).$$

Das vollständige Integral

$$z = C_1 x + C_2 y + \varphi(C_1, C_2)$$

stellt ∞^2 Ebenen dar.

Das allgemeine Integral, das man wie bei 13 erhält, stellt ∞^1 abwickelbare Flächen dar, die Enveloppen dieser ∞^2 Ebenen; das singuläre Integral, das man nach § 141, 12 erhält, ist eine bestimmte, von den ∞^2 Ebenen des vollständigen Integrals und den ∞^1 Flächen des allgemeinen Integrals berührte Fläche.

§ 143. Lösung von partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung.

I. Lineare partielle Differentialgleichungen.

1. **Allgemeine Form**

$$a_0 z + \left[b_0 \frac{\partial z}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z}{\partial y}\right] + \left[c_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right] + \cdots = 0.$$

Für jedes Paar Zahlen α_i und β_i, welche der charakteristischen Gleichung

$$a_0 + [b_0 \alpha + b_1 \beta] + [c_0 \alpha^2 + c_1 \alpha\beta + c_2 \beta] + \cdots = 0$$

Genüge leisten, erhält man eine partikuläre Lösung

$$z = C_i e^{\alpha_i x + \beta_i y},$$

wo C_i eine willkürliche Konstante.

Allgemeinere Lösung:

$$z = \sum C_i e^{\alpha_i x + \beta_i y} \ldots . \, i = 1 \text{ bis } \infty.$$

2. $c_0 r + c_1 s + c_2 t = 0$ od. $c_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

Wenn das Paar $\alpha_i | \beta_i$ der charakteristischen Gleichung

$$c_0 \alpha^2 + c_1 \alpha\beta + c_2 \beta^2 = 0$$

Genüge leistet, ist

$$z = C_i e^{\alpha_i x + \beta_i y}$$

eine partikuläre Lösung. Für $\beta = m\alpha$ wird die charakteristische Gleichung

$$c_0 + c_1 m + c_2 m^2 = 0,$$

mit den beiden Wurzeln m_1 und m_2. Dann ist die allgemeinere Lösung

$$z = \sum C_i e^{(x + m_1 y)\alpha_i} + \sum C'_i e^{(x + m_2 y)\alpha_i}$$

$i = 1$ bis ∞; oder wenn F und G zwei willkürliche Funktionen sind,

$$z = F(x + m_1 y) + G(x + m_2 y).$$

3. **Gleichung für schwingende Saiten** (Bernoulli). Spezialfall von 2, wenn $c_1 = 0$.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Charakteristische Gleichung: $\beta^2 = a^2 \alpha^2$,

also $\quad m_1 = a, \quad m_2 = -a.$

Lösung $\quad y = F(x + at) + G(x - at).$

4. **Gleichung der Wärmeleitung** $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$

Charakteristische Gleichung: $\beta = a^2 \alpha^2$.

Lösung $\quad u = \sum C_i e^{\alpha_i x} e^{a^2 \alpha_i^2 t} \ldots i = 1$ bis ∞.

5. **Kontinuitätsbedingung** für inkompressible Flüssigkeiten (U ist das Geschwindigkeitspotential)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

(Strömung in der Ebene), Speziallfall von 2. Charakteristische Gleichung:

$$\beta^2 + \alpha^2 = 0,$$

also $\quad m_1 = i, \quad m_2 = -i.$

Lösung $\quad U = F(x + iy) + G(x - iy)$

$\quad = U_1 + iU_2$ (siehe § 36).

II. Nichtlineare partielle Differentialgleichungen.

6. **Gleichung der abwickelbaren Flächen**

$$rt - s^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

Allgemeines Integral durch Elimination von C aus

$$\left.\begin{aligned} z &= Cx + y\,f(C) + g(C) \\ 0 &= x + y\,f'(C) + g'(C) \end{aligned}\right\}.$$

f(C) und g(C) sind zwei willkürliche Funktionen.

XII. Elemente der Vektorenrechnung.

§ 144. Definition und Darstellung der Vektoren.

1. **Ungerichtete** oder **skalare Größen** sind solche Größen, denen nur ein (durch eine einzige Zahl in umkehrbarer Weise eindeutig darstellbarer) Mengenbegriff innewohnt, z. B. Zeit, Masse, Wärme usw.

2. **Gerichtete** oder **vektorielle Größen (Vektoren)** sind solche, denen neben dem Mengenbegriff noch eine Richtung zukommt, z. B. Weg, Geschwindigkeit, Kraft usw.

3. Skalare sollen mit lateinischen Buchstaben, Vektoren mit fetten deutschen bezeichnet werden, z. B. $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{P}$.

4. Die Darstellung oder das Bild eines Vektors ist eine Strecke, versehen mit Pfeil. Die Maßzahl der Strecke ist unter Berücksichtigung des Darstellungsmaßstabes dieselbe wie die des Vektors, die Richtung der Strecke soll die Richtung des Vektors darstellen und der Pfeil den Richtungs*sinn*. Die *Lage* des Vektors im Raum wird durch sein Bild, die mit Pfeil versehene Strecke, *nicht* zur Darstellung gebracht.

5. Der Vektor kann ebenso wie die Skalare eine benannte oder unbenannte Zahl sein.

6. **Einheitsvektoren** sind Vektoren, deren Zahlenwert 1 ist.

7. Trägt man alle Einheitsvektoren der Ebene bezw. des Raumes von einem festen Punkt aus ab, so bilden die Endpunkte einen Kreis bezw. eine Kugelfläche mit dem Radius 1. (In Fig. 55 sind $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ beliebig ausgewählte Einheitsvektoren.)

8. Jeder Vektor ist das Vielfache eines Einheitsvektors; z. B. ist nach Fig. 55

$$\mathfrak{A} = 3\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{B} = 1{,}2\,\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{C} = {}^5/_4\,\mathfrak{c}.$$

9. Die Zahl, welche angibt, wie viel mal so groß der Vektor ist als der mit ihm parallele Einheitsvektor, heißt der **Tensor** des Vektors. (In Fig. 55 sind $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{c}$ parallel, sie haben gleichen Richtungssinn. Der Tensor von $\mathfrak{C}$ ist $C = {}^5/_4$).

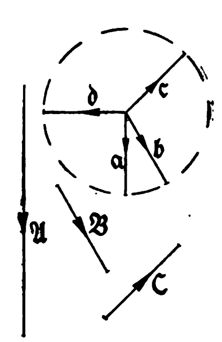


Fig. 55.

10. Jeder Vektor ist gleich Tensor mal Einheitsvektor,

$$\mathfrak{A} = A\mathfrak{a}.$$

11. Zwei Vektoren $\mathfrak{U} = U\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{V} = V\mathfrak{v}$ können gemeinsam haben

a) den Tensor, also $U = V$,

b) den Einheitsvektor, also $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$,

c) Tensor und Einheitsvektor, also $U = V$, $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$. In diesem Fall heißt man die Vektoren gleich und schreibt

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{V}.$$

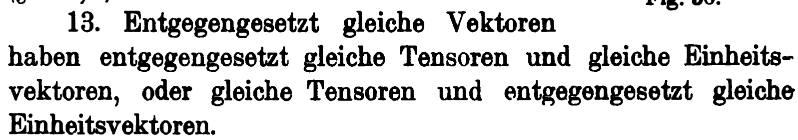
12. Nimmt man in der Ebene zwei zueinander senkrechte Richtungen an und hält sie für die Dauer der Untersuchung fest, so sollen die Einheitsvektoren in diesen zwei ausgezeichneten Richtungen als **Grundvektoren** bezeichnet werden: $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$.

Entsprechend hat man im Raum drei Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ in der X-, Y- und Z-Richtung eines räumlichen Koordinatensystems. Die Reihenfolge der Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ bildet ein Rechtssystem (§ 106, 7).



Fig. 56.

13. Entgegengesetzt gleiche Vektoren haben entgegengesetzt gleiche Tensoren und gleiche Einheitsvektoren, oder gleiche Tensoren und entgegengesetzt gleiche Einheitsvektoren.



Wenn $\mathfrak{U} = -\mathfrak{V}$, so kann sein $U = -V$ und $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$, oder $U = V$ und $\mathfrak{u} = -\mathfrak{v}$.

14. Durch Angabe eines variablen Vektors ist eine ebene oder räumliche Kurve als geometrischer Ort der Vektor-Enden definiert. (Siehe Kurvendiskussion: Zykloide usw.)

15. Die elementaren Rechnungsoperationen mit Vektoren bezwecken eine möglichst sinnfällige Darstellung von wichtigen Größen der Mechanik und von diesen hergeleiteten Größen: Resultante, Arbeit, Moment usw. Durch diese Absicht erklären sich die in den folgenden Zeilen eingeführten Definitionen von Summe oder Produkt zweier Vektoren.

§ 145. Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$.

1. Definition. Man bildet die **Summe** $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ (meist sagt man geometrische oder graphische Summe), indem man von einem beliebigen Punkt O aus zuerst den einen Vektor $\mathfrak{A}$ anträgt, von dessen Endpunkt aus den zweiten Vektor $\mathfrak{B}$, und den Anfangspunkt O mit dem Endpunkt E verbindet. Der Vektor von O nach E ist als die Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ definiert, Fig. 57.

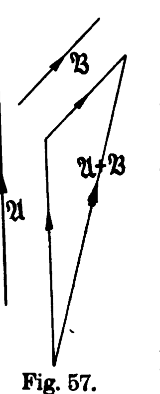


Fig. 57.

2. $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$, d. h. die Reihenfolge der Summanden ist belanglos.

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}).$$

3. Jeder Summensatz wird durch ein Polygon dargestellt. Umgekehrt ist jedes (ebene oder räumliche) Polygon als Bild eines Summensatzes zu betrachten. Das Polygon der Fig. 58 z. B. ist zu lesen

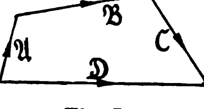


Fig. 58.

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \mathfrak{D}$$

oder $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} = 0$.

4. **Zerlegen von Vektoren in Komponenten.** Wie man aus zwei oder mehreren Vektoren durch geometrische Summierung einen einzigen erhält, so kann man umgekehrt einen Vektor in zwei oder mehrere andere zerlegen. Die so neu entstandenen Vektoren heißen die **Komponenten** des gegebenen Vektors (Fig. 59).

Z. B. $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} + \mathfrak{d}$,

oder $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} + \mathfrak{f} + \mathfrak{g}$,

oder $\mathfrak{a} + \mathfrak{h} + \mathfrak{m} = 0$,

d. h. $\mathfrak{a} = -\mathfrak{h} - \mathfrak{m}$.

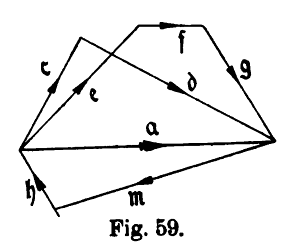
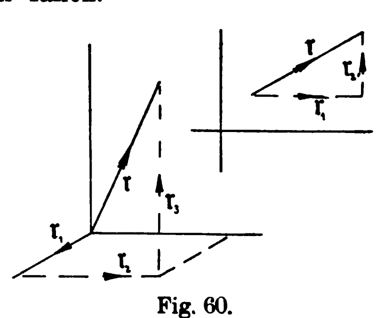


Fig. 59.

Meist zerlegt man einen Vektor derart, daß die einzelnen Komponenten in die Richtung der Grundvektoren fallen.


Fig. 60.

Sind r_1, r_2 die Projektionen des Vektors $\mathfrak{r}$ auf die zwei Koordinatenaxen der Ebene, also $P = r_1|r_2$ der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{r}$ — im Raum sind r_1, r_2, r_3 die drei Projektionen auf die Koordinatenaxen oder Grundvektoren, $P = r_1|r_2|r_3$ der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{r}$ — so sind die Komponenten nach den Grundrichtungen: $r_1\mathfrak{i}$, $r_2\mathfrak{j}$ in der Ebene, bezw. $r_1\mathfrak{i}$, $r_2\mathfrak{j}$, $r_3\mathfrak{k}$ im Raum, also (Fig. 60)

$$\mathfrak{r} = r_1\mathfrak{i} + r_2\mathfrak{j} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2$$

bezw. $$\mathfrak{r} = r_1\mathfrak{i} + r_2\mathfrak{j} + r_3\mathfrak{k} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3.$$

5. **Projektionssatz.** Projiziert man ein geschlossenes (ebenes oder räumliches) Polygon auf eine Ebene oder eine Gerade, so wird im projizierten Polygon die Reihenfolge der Pfeile, d. i. der Richtungssinn der Vektoren, nicht geändert. Wenn also im Originalpolygon gilt

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C},$$

dann gilt auch bei Projektion auf eine beliebige Ebene

$$\mathfrak{S}' = \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' + \mathfrak{C}',$$

und bei Projektion auf eine Gerade

$$S'' = A'' + B'' + C'',$$

wenn $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{A}'$, usw. die projizierten Vektoren sind.

Jeder Summensatz wird durch ein geschlossenes Polygon dargestellt, also gilt: Ein Summensatz bleibt erhalten, wenn man alle Summanden gleichzeitig auf eine Ebene oder auf eine Gerade projiziert.

§ 146. Elementares Produkt $m\mathfrak{A}$.

1. **Definition.** $m\mathfrak{A}$ heißt, der Vektor $\mathfrak{A}$ soll m mal addiert werden. Der neue Vektor $m\mathfrak{A}$ hat die gleiche Richtung wie $\mathfrak{A}$.

2. Sätze. $A\mathfrak{B} = \mathfrak{B}A$.

$$(A + B)\mathfrak{C} = A\mathfrak{C} + B\mathfrak{C}.$$

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})C = \mathfrak{A}C + \mathfrak{B}C.$$

3. Für das elementare Produkt $m\mathfrak{A}$ gelten dieselben Regeln wie für das algebraische Produkt ab.

§ 147. Skalares Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

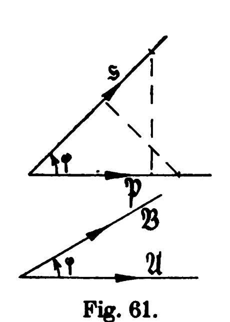


Fig. 61.

1. Legt der Angriffspunkt der nach Größe und Richtung konstanten Kraft P den Weg s zurück, so ist, wenn der Winkel von P nach s mit φ, die Projektion von s auf P mit s', die Projektion von P auf s mit P' bezeichnet wird, die Arbeit der Kraft P auf dem Weg s

Arbeit $= Ps\cos\varphi = Ps' = P's$
(= Kraft mal Weg mal Kosinus Zwischenwinkel
= Kraft mal Wegprojektion
= Weg mal Kraftprojektion).

2. Um für die physikalische Größe Arbeit, die eine skalare Größe ist, eine vektoranalytisch verwertbare Form zu erhalten, führt man ein die

3. Definition: **Skalares Produkt** (oder **inneres Produkt**)

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB\cos\varphi$$

(= Tensor A mal Tensor B mal Kosinus Zwischenwinkel).

4. Sätze. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$.

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C} + \mathfrak{D}) = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}.$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} = A^2.$$

$$\mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\mathfrak{k} = 1.$$

$$\mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{j}\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\mathfrak{i} = 0.$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3,$$

wenn $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ die Projektionen von $\mathfrak{A}$ bezw. $\mathfrak{B}$ auf die drei Grundrichtungen sind.

5. Die Arbeit der Kraft $\mathfrak{P}$ auf dem Weg $\mathfrak{s}$ ist $\mathfrak{P}\mathfrak{s}$.

§ 148. **Vektorprodukt $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$.**

1. Greift die Kraft P an dem materiellen Punkt A an, den man sich durch eine gewichtslose starre Stange mit dem Punkt 0 fest verbunden denkt, so ist die Drehwirkung (= **Moment**) von P für ein im Punkt 0 gedachtes Kugelgelenk hinreichend charakterisiert, wenn man angibt

a) Größe des Momentes $M = Py$, d. i. das in Fig. 62 schraffierte Dreieck (= **Momentendreieck**), doppelt gezählt;

Fig. 62.

b) Richtung der Drehaxe, d. i. eine in 0 senkrecht zum Momentendreieck stehende Axe;

c) Richtungssinn der Drehung, d. i. in Fig. 62 der Uhrzeigersinn.

2. Um für die physikalische Größe Moment, die eine gerichtete Größe ist, eine vektoranalytisch verwertbare Form zu erhalten, definiert man

3. **Vektorprodukt** (oder **äußeres Produkt**)

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{V}$$

ist ein Vektor, dessen Tensor

$$V = AB \sin\varphi,$$

φ von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gezählt; $\mathfrak{V}$ steht senkrecht zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{V}$ müssen in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden.

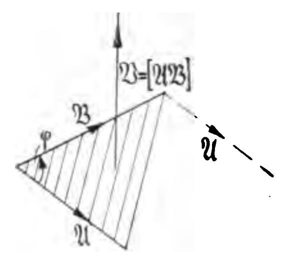


Fig. 63.

Oder (Fig. 63): Der Tensor des Vektorproduktes ist gegeben durch das doppelte aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gebildete Vektordreieck; $\mathfrak{V}$ steht senkrecht zum Vektordreieck und zwar so gerichtet, daß $\mathfrak{A}$

an (dem als Hebelarm gedachten) $\mathfrak{B}$ angreifend eine Uhrzeigerbewegung hervorruft, falls der Pfeil von $\mathfrak{B}$ zum Beobachter geht.

4. Sätze. $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]$.

$$[(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{C}].$$

$$[(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})(\mathfrak{C}+\mathfrak{D})] = [\mathfrak{A}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{A}\mathfrak{D}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{D}].$$

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{A}] = 0.$$

$$[\mathfrak{i}\mathfrak{i}] = [\mathfrak{j}\mathfrak{j}] = [\mathfrak{k}\mathfrak{k}] = 0.$$

$$[\mathfrak{i}\mathfrak{j}] = \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{j}\mathfrak{k}] = \mathfrak{i}, \quad [\mathfrak{k}\mathfrak{i}] = \mathfrak{j}.$$

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix},$$

wenn $A_1, A_2, A_3,\ B_1, B_2, B_3$ die Projektionen von $\mathfrak{A}$ bezw. $\mathfrak{B}$ auf die drei Grundrichtungen sind.

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$$

$$[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

§ 149. Differentialquotient der Elementaroperationen.

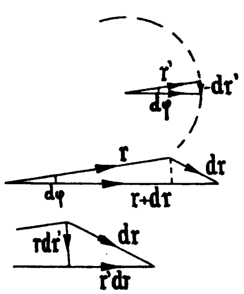


Fig. 64.

1. Schließen der Vektor $\mathfrak{r}$ und der ihm unendlich benachbarte $\mathfrak{r} + d\mathfrak{r}$ den Winkel $d\varphi$ ein, dann auch die beiden entsprechenden unendlich benachbarten Einheitsvektoren $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}' + d\mathfrak{r}'$ (Fig. 64).

2. Das **Differential** $d\mathfrak{r}'$ eines Einheitsvektors $\mathfrak{r}'$ steht senkrecht zu diesem Einheitsvektor.

Der Tensor dieses Differentials ist $d\varphi$.

3. Das Differential $d\mathfrak{r}$ des Vektors $\mathfrak{r} = r\mathfrak{r}'$ ist mit dem Differential dr des Tensors von $\mathfrak{r}$ und mit dem Differential $d\mathfrak{r}'$ des Einheitsvektors von $\mathfrak{r}$ verknüpft durch die Relation (Fig. 64)

$$d\mathfrak{r} = r\,d\mathfrak{r}' + \mathfrak{r}'\,dr.$$

$r\,d\mathfrak{r}'$ steht senkrecht zu $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'\,dr$ ist gleichgerichtet mit $\mathfrak{r}$.

4. Ist $\mathfrak{r} = r\mathfrak{r}'$ variabel und als vom Parameter t abhängig vorausgesetzt, so ist

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\mathfrak{r}(t + \Delta t) - \mathfrak{r}(t)}{\Delta t}.$$

$$\frac{d\mathfrak{r}'}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\mathfrak{r}'(t + \Delta t) - \mathfrak{r}'(t)}{\Delta t}.$$

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d(r\mathfrak{r}')}{dt} = r\frac{d\mathfrak{r}'}{dt} + \mathfrak{r}'\frac{dr}{dt}.$$

5. Sind $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ variabel und als vom Parameter t abhängig vorausgesetzt, so ist

$$\frac{d(\mathfrak{U}\mathfrak{V})}{dt} = \mathfrak{U}\frac{d\mathfrak{V}}{dt} + \mathfrak{V}\frac{d\mathfrak{U}}{dt}$$

$$\frac{d[\mathfrak{U}\mathfrak{V}]}{dt} = \left[\mathfrak{U}\frac{d\mathfrak{V}}{dt}\right] + \left[\frac{d\mathfrak{U}}{dt}\mathfrak{V}\right].$$

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1	1	1	1,0000	1,0000	0,00000	1000,000	3,142	0,7854	1
2	4	8	1,4142	1,2599	0,30103	500,000	6,283	3,1416	2
3	9	27	1,7321	1,4422	0,47712	333,333	9,425	7,0686	3
4	16	64	2,0000	1,5874	0,60206	250,000	12,566	12,5664	4
5	25	125	2,2361	1,7100	0,69897	200,000	15,708	19,6350	5
6	36	216	2,4495	1,8171	0,77815	166,667	18,850	28,2743	6
7	49	343	2,6458	1,9129	0,84510	142,857	21,991	38,4845	7
8	64	512	2,8284	2,0000	0,90309	125,000	25,133	50,2655	8
9	81	729	3,0000	2,0801	0,95424	111,111	28,274	63,6173	9
10	100	1000	3,1623	2,1544	1,00000	100,000	31,416	78,5398	**10**
11	121	1331	3,3166	2,2240	1,04139	90,9091	34,558	95,0332	11
12	144	1728	3,4641	2,2894	1,07918	83,3333	37,699	113,097	12
13	169	2197	3,6056	2,3513	1,11394	76,9231	40,841	132,732	13
14	196	2744	3,7417	2,4101	1,14613	71,4286	43,982	153,938	14
15	225	3375	3,8730	2,4662	1,17609	66,6667	47,124	176,715	15
16	256	4096	4,0000	2,5198	1,20412	62,5000	50,265	201,062	16
17	289	4913	4,1231	2,5713	1,23045	58,8235	53,407	226,980	17
18	324	5832	4,2426	2,6207	1,25527	55,5556	56,549	254,469	18
19	361	6859	4,3589	2,6684	1,27875	52,6316	59,690	283,529	19
20	400	8000	4,4721	2,7144	1,30103	50,0000	62,832	314,159	**20**
21	441	9261	4,5826	2,7589	1,32222	47,6190	65,973	346,361	21
22	484	10648	4,6904	2,8020	1,34242	45,4545	69,115	380,133	22
23	529	12167	4,7958	2,8439	1,36173	43,4783	72,257	415,476	23
24	576	13824	4,8990	2,8845	1,38021	41,6667	75,398	452,389	24
25	625	15625	5,0000	2,9240	1,39794	40,0000	78,540	490,874	25
26	676	17576	5,0990	2,9625	1,41497	38,4615	81,681	530,929	26
27	729	19683	5,1962	3,0000	1,43136	37,0370	84,823	572,555	27
28	784	21952	5,2915	3,0366	1,44716	35,7143	87,965	615,752	28
29	841	24389	5,3852	3,0723	1,46240	34,4828	91,106	660,520	29
30	900	27000	5,4772	3,1072	1,47712	33,3333	94,248	706,858	**30**
31	961	29791	5,5678	3,1414	1,49136	32,2581	97,389	754,768	31
32	1024	32768	5,6569	3,1748	1,50515	31,2500	100,531	804,248	32
33	1089	35937	5,7446	3,2075	1,51851	30,3030	103,673	855,299	33
34	1156	39304	5,8310	3,2396	1,53148	29,4118	106,814	907,920	34
35	1225	42875	5,9161	3,2711	1,54407	28,5714	109,956	962,113	35
36	1296	46656	6,0000	3,3019	1,55630	27,7778	113,097	1017,88	36
37	1369	50653	6,0828	3,3322	1,56820	27,0270	116,239	1075,21	37
38	1444	54872	6,1644	3,3620	1,57978	26,3158	119,381	1134,11	38
39	1521	59319	6,2450	3,3912	1,59106	25,6410	122,522	1194,59	39
40	1600	64000	6,3246	3,4200	1,60206	25,0000	125,66	1256,64	**40**
41	1681	68921	6,4031	3,4482	1,61278	24,3902	128,81	1320,25	41
42	1764	74088	6,4807	3,4760	1,62325	23,8095	131,95	1385,44	42
43	1849	79507	6,5574	3,5034	1,63347	23,2558	135,09	1452,20	43
44	1936	85184	6,6332	3,5303	1,64345	22,7273	138,23	1520,53	44
45	2025	91125	6,7082	3,5569	1,65321	22,2222	141,37	1590,43	45
46	2116	97336	6,7823	3,5830	1,66276	21,7391	144,51	1661,90	46
47	2209	103823	6,8557	3,6088	1,67210	21,2766	147,65	1734,94	47
48	2304	110592	6,9282	3,6342	1,68124	20,8333	150,80	1809,56	48
49	2401	117649	7,0000	3,6593	1,69020	20,4082	153,94	1885,74	49
50	2500	125000	7,0711	3,6840	1,69897	20,0000	157,08	1963,50	**50**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
50	2500	125000	7,0711	3,6840	1,69897	20,0000	157,08	1963,50	**50**
51	2601	132651	7,1414	3,7084	1,70757	19,6078	160,22	2042,82	51
52	2704	140608	7,2111	3,7325	1,71600	19,2308	163,36	2123,72	52
53	2809	148877	7,2801	3,7563	1,72428	18,8679	166,50	2206,18	53
54	2916	157464	7,3485	3,7798	1,73239	18,5185	169,65	2290,22	54
55	3025	166375	7,4162	3,8030	1,74036	18,1818	172,79	2375,83	55
56	3136	175616	7,4833	3,8259	1,74819	17,8571	175,93	2463,01	56
57	3249	185193	7,5498	3,8485	1,75587	17,5439	179,07	2551,76	57
58	3364	195112	7,6158	3,8709	1,76343	17,2414	182,21	2642,08	58
59	3481	205379	7,6811	3,8930	1,77085	16,9492	185,35	2733,97	59
60	3600	216000	7,7460	3,9149	1,77815	16,6667	188,50	2827,43	**60**
61	3721	226981	7,8102	3,9365	1,78533	16,3934	191,64	2922,47	61
62	3844	238328	7,8740	3,9579	1,79239	16,1290	194,78	3019,07	62
63	3969	250047	7,9373	3,9791	1,79934	15,8730	197,92	3117,25	63
64	4096	262144	8,0000	4,0000	1,80618	15,6250	201,06	3216,99	64
65	4225	274625	8,0623	4,0207	1,81291	15,3846	204,20	3318,31	65
66	4356	287496	8,1240	4,0412	1,81954	15,1515	207,35	3421,19	66
67	4489	300763	8,1854	4,0615	1,82607	14,9254	210,49	3525,65	67
68	4624	314432	8,2462	4,0817	1,83251	14,7059	213,63	3631,68	68
69	4761	328509	8,3066	4,1016	1,83885	14,4928	216,77	3739,28	69
70	4900	343000	8,3666	4,1213	1,84510	14,2857	219,91	3848,45	**70**
71	5041	357911	8,4261	4,1408	1,85126	14,0845	223,05	3959,19	71
72	5184	373248	8,4853	4,1602	1,85733	13,8889	226,19	4071,50	72
73	5329	389017	8,5440	4,1793	1,86332	13,6986	229,34	4185,39	73
74	5476	405224	8,6023	4,1983	1,86923	13,5135	232,48	4300,84	74
75	5625	421875	8,6603	4,2172	1,87506	13,3333	235,62	4417,86	75
76	5776	438976	8,7178	4,2358	1,88081	13,1579	238,76	4536,46	76
77	5929	456533	8,7750	4,2543	1,88649	12,9870	241,90	4656,63	77
78	6084	474552	8,8318	4,2727	1,89209	12,8205	245,04	4778,36	78
79	6241	493039	8,8882	4,2908	1,89763	12,6582	248,19	4901,67	79
80	6400	512000	8,9443	4,3089	1,90309	12,5000	251,33	5026,55	**80**
81	6561	531441	9,0000	4,3267	1,90849	12,3457	254,47	5153,00	81
82	6724	551368	9,0554	4,3445	1,91381	12,1951	257,61	5281,02	82
83	6889	571787	9,1104	4,3621	1,91908	12,0482	260,75	5410,61	83
84	7056	592704	9,1652	4,3795	1,92428	11,9048	263,89	5541,77	84
85	7225	614125	9,2195	4,3968	1,92942	11,7647	267,04	5674,50	85
86	7396	636056	9,2736	4,4140	1,93450	11,6279	270,18	5808,80	86
87	7569	658503	9,3274	4,4310	1,93952	11,4943	273,32	5944,68	87
88	7744	681472	9,3808	4,4480	1,94448	11,3636	276,46	6082,12	88
89	7921	704969	9,4340	4,4647	1,94939	11,2360	279,60	6221,14	89
90	8100	729000	9,4868	4,4814	1,95424	11,1111	282,74	6361,73	**90**
91	8281	753571	9,5394	4,4979	1,95904	10,9890	285,88	6503,88	91
92	8464	778688	9,5917	4,5144	1,96379	10,8696	289,03	6647,61	92
93	8649	804357	9,6437	4,5307	1,96848	10,7527	292,17	6792,91	93
94	8836	830584	9,6954	4,5468	1,97313	10,6383	295,31	6939,78	94
95	9025	857375	9,7468	4,5629	1,97772	10,5263	298,45	7088,22	95
96	9216	884736	9,7980	4,5789	1,98227	10,4167	301,59	7238,23	96
97	9409	912673	9,8489	4,5947	1,98677	10,3093	304,73	7389,81	97
98	9604	941192	9,8995	4,6104	1,99123	10,2041	307,88	7542,96	98
99	9801	970299	9,9499	4,6261	1,99564	10,1010	311,02	7697,69	99
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	2,00000	10,0000	314,16	7853,98	**100**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	2,00000	10,0000	314,16	7853,98	**100**
101	10201	1030301	10,0499	4,6570	2,00432	9,90099	317,30	8011,85	101
102	10404	1061208	10,0995	4,6723	2,00860	9,80392	320,44	8171,28	102
103	10609	1092727	10,1489	4,6875	2,01284	9,70874	323,58	8332,29	103
104	10816	1124864	10,1980	4,7027	2,01703	9,61538	326,73	8494,87	104
105	11025	1157625	10,2470	4,7177	2,02119	9,52381	329,87	8659,01	105
106	11236	1191016	10,2956	4,7326	2,02531	9,43396	333,01	8824,73	106
107	11449	1225043	10,3441	4,7475	2,02938	9,34579	336,15	8992,02	107
108	11664	1259712	10,3923	4,7622	2,03342	9,25926	339,29	9160,88	108
109	11881	1295029	10,4403	4,7769	2,03743	9,17431	342,43	9331,32	109
110	12100	1331000	10,4881	4,7914	2,04139	9,09091	345,58	9503,32	**110**
111	12321	1367631	10,5357	4,8059	2,04532	9,00901	348,72	9676,89	111
112	12544	1404928	10,5830	4,8203	2,04922	8,92857	351,86	9852,03	112
113	12769	1442897	10,6301	4,8346	2,05308	8,84956	355,00	10028,7	113
114	12996	1481544	10,6771	4,8488	2,05690	8,77193	358,14	10207,0	114
115	13225	1520875	10,7238	4,8629	2,06070	8,69565	361,28	10386,9	115
116	13456	1560896	10,7703	4,8770	2,06446	8,62069	364,42	10568,3	116
117	13689	1601613	10,8167	4,8910	2,06819	8,54701	367,57	10751,3	117
118	13924	1643032	10,8628	4,9049	2,07188	8,47458	370,71	10935,9	118
119	14161	1685159	10,9087	4,9187	2,07555	8,40336	373,85	11122,0	119
120	14400	1728000	10,9545	4,9324	2,07918	8,33333	376,99	11309,7	**120**
121	14641	1771561	11,0000	4,9461	2,08279	8,26446	380,13	11499,0	121
122	14884	1815848	11,0454	4,9597	2,08636	8,19672	383,27	11689,9	122
123	15129	1860867	11,0905	4,9732	2,08991	8,13008	386,42	11882,3	123
124	15376	1906624	11,1355	4,9866	2,09342	8,06452	389,56	12076,3	124
125	15625	1953125	11,1803	5,0000	2,09691	8,00000	392,70	12271,8	125
126	15876	2000376	11,2250	5,0133	2,10037	7,93651	395,84	12469,0	126
127	16129	2048383	11,2694	5,0265	2,10380	7,87402	398,98	12667,7	127
128	16384	2097152	11,3137	5,0397	2,10721	7,81250	402,12	12868,0	128
129	16641	2146689	11,3578	5,0528	2,11059	7,75194	405,27	13069,8	129
130	16900	2197000	11,4018	5,0658	2,11394	7,69231	408,41	13273,2	**130**
131	17161	2248091	11,4455	5,0788	2,11727	7,63359	411,55	13478,2	131
132	17424	2299968	11,4891	5,0916	2,12057	7,57576	414,69	13684,8	132
133	17689	2352637	11,5326	5,1045	2,12385	7,51880	417,83	13892,9	133
134	17956	2406104	11,5758	5,1172	2,12710	7,46269	420,97	14102,6	134
135	18225	2460375	11,6190	5,1299	2,13033	7,40741	424,12	14313,9	135
136	18496	2515456	11,6619	5,1426	2,13354	7,35294	427,26	14526,7	136
137	18769	2571353	11,7047	5,1551	2,13672	7,29927	430,40	14741,1	137
138	19044	2628072	11,7473	5,1676	2,13988	7,24638	433,54	14957,1	138
139	19321	2685619	11,7898	5,1801	2,14301	7,19424	436,68	15174,7	139
140	19600	2744000	11,8322	5,1925	2,14613	7,14286	439,82	15393,8	**140**
141	19881	2803221	11,8743	5,2048	2,14922	7,09220	442,96	15614,5	141
142	20164	2863288	11,9164	5,2171	2,15229	7,04225	446,11	15836,8	142
143	20449	2924207	11,9583	5,2293	2,15534	6,99301	449,25	16060,6	143
144	20736	2985984	12,0000	5,2415	2,15836	6,94444	452,39	16286,0	144
145	21025	3048625	12,0416	5,2536	2,16137	6,89655	455,53	16513,0	145
146	21316	3112136	12,0830	5,2656	2,16435	6,84932	458,67	16741,5	146
147	21609	3176523	12,1244	5,2776	2,16732	6,80272	461,81	16971,7	147
148	21904	3241792	12,1655	5,2896	2,17026	6,75676	464,96	17203,4	148
149	22201	3307949	12,2066	5,3015	2,17319	6,71141	468,10	17436,6	149
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	2,17609	6,66667	471,24	17671,5	**150**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	2,17609	6,66667	471,24	17671,5	**150**
151	22801	3442951	12,2882	5,3251	2,17898	6,62252	474,38	17907,9	151
152	23104	3511808	12,3288	5,3368	2,18184	6,57895	477,52	18145,8	152
153	23409	3581577	12,3693	5,3485	2,18469	6,53595	480,66	18385,4	153
154	23716	3652264	12,4097	5,3601	2,18752	6,49351	483,81	18626,5	154
155	24025	3723875	12,4499	5,3717	2,19033	6,45161	486,95	18869,2	155
156	24336	3796416	12,4900	5,3832	2,19312	6,41026	490,09	19113,4	156
157	24649	3869893	12,5300	5,3947	2,19590	6,36943	493,23	19359,3	157
158	24964	3944312	12,5698	5,4061	2,19866	6,32911	496,37	19606,7	158
159	25281	4019679	12,6095	5,4175	2,20140	6,28931	499,51	19855,7	159
160	25600	4096000	12,6491	5,4288	2,20412	6,25000	502,65	20106,2	**160**
161	25921	4173281	12,6886	5,4401	2,20683	6,21118	505,80	20358,3	161
162	26244	4251528	12,7279	5,4514	2,20952	6,17284	508,94	20612,0	162
163	26569	4330747	12,7671	5,4626	2,21219	6,13497	512,08	20867,2	163
164	26896	4410944	12,8062	5.4737	2,21484	6,09756	515,22	21124,1	164
165	27225	4492125	12,8452	5,4848	2,21748	6,06061	518,36	21382,5	165
166	27556	4574296	12,8841	5,4959	2.22011	6,02410	521,50	21642,4	166
167	27889	4657463	12,9228	5,5069	2,22272	5,98802	524,65	21904,0	167
168	28224	4741632	12,9615	5,5178	2,22531	5,95238	527,79	22167,1	168
169	28561	4826809	13,0000	5,5288	2,22789	5,91716	530,93	22431,8	169
170	28900	4913000	13,0384	5,5397	2,23045	5,88235	534,07	22698,0	**170**
171	29241	5000211	13,0767	5,5505	2,23300	5,84795	537,21	22965,8	171
172	29584	5088448	13,1149	5,5613	2,23553	5,81395	540,35	23235,2	172
173	29929	5177717	13,1529	5,5721	2,23805	5,78035	543,50	23506,2	173
174	30276	5268024	13,1909	5,5828	2,24055	5,74713	546,64	23778,7	174
175	30625	5359375	13,2288	5,5934	2,24304	5,71429	549,78	24052,8	175
176	30976	5451776	13,2665	5,6041	2,24551	5,68182	552,92	24328,5	176
177	31329	5545233	13,3041	5,6147	2,24797	5,64972	556,06	24605,7	177
178	31684	5639752	13,3417	5,6252	2,25042	5,61798	559,20	24884,6	178
179	32041	5735339	13,3791	5,6357	2,25285	5,58659	562,35	25164,9	179
180	32400	5832000	13,4164	5,6462	2,25527	5,55556	565,49	25446,9	**180**
181	32761	5929741	13,4536	5,6567	2,25768	5,52486	568,63	25730,4	181
182	33124	6028568	13,4907	5,6671	2,26007	5,49451	571,77	26015,5	182
183	33489	6128487	13,5277	5,6774	2,26245	5,46448	574,91	26302,2	183
184	33856	6229504	13,5647	5,6877	2,26482	5,43478	578,05	26590,4	184
185	34225	6331625	13,6015	5,6980	2,26717	5,40541	581,19	26880,3	185
186	34596	6434856	13,6382	5,7083	2,26951	5,37634	584,34	27171,6	186
187	34969	6539203	13,6748	5,7185	2,27184	5,34759	587,48	27464,6	187
188	35344	6644672	13,7113	5,7287	2,27416	5,31915	590,62	27759,1	188
189	35721	6751269	13,7477	5,7388	2,27646	5,29101	593,76	28055,2	189
190	36100	6859000	13,7840	5,7489	2,27875	5,26316	596,90	28352,9	**190**
191	36481	6967871	13,8203	5,7590	2,28103	5,23560	600,04	28652,1	191
192	36864	7077888	13,8564	5,7690	2,28330	5,20833	603,19	28952,9	192
193	37249	7189057	13,8924	5,7790	2,28556	5,18135	606,33	29255,3	193
194	37636	7301384	13,9284	5,7890	2,28780	5,15464	609,47	29559,2	194
195	38025	7414875	13,9642	5,7989	2,29003	5,12821	612,61	29864,8	195
196	38416	7529536	14,0000	5,8088	2,29226	5,10204	615,75	30171,9	196
197	38809	7645373	14,0357	5,8186	2,29447	5,07614	618,89	30480,5	197
198	39204	7762392	14,0712	5,8285	2,29667	5,05051	622,04	30790,7	198
199	39601	7880599	14,1067	5,8383	2,29885	5,02513	625,18	31102,6	199
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	2,30103	5,00000	628,32	31415,9	**200**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	2,30103	5,00000	628,32	31415,9	**200**
201	40401	8120601	14,1774	5,8578	2,30320	4,97512	631,46	31730,9	201
202	40804	8242408	14,2127	5,8675	2,30535	4,95050	634,60	32047,4	202
203	41209	8365427	14,2478	5,8771	2,30750	4,92611	637,74	32365,5	203
204	41616	8489664	14,2829	5,8868	2,30963	4,90196	640,88	32685,1	204
205	42025	8615125	14,3178	5,8964	2,31175	4,87805	644,03	33006,4	205
206	42436	8741816	14,3527	5,9059	2,31387	4,85437	647,17	33329,2	206
207	42849	8869743	14,3875	5,9155	2,31597	4,83092	650,31	33653,5	207
208	43264	8998912	14,4222	5,9250	2,31806	4,80769	653,45	33979,5	208
209	43681	9129329	14,4568	5,9345	2,32015	4,78469	656,59	34307,0	209
210	44100	9261000	14,4914	5,9439	2,32222	4,76190	659,73	34636,1	**210**
211	44521	9393931	14,5258	5,9533	2,32428	4,73934	662,88	34966,7	211
212	44944	9528128	14,5602	5,9627	2,32634	4,71698	666,02	35298,9	212
213	45369	9663597	14,5945	5,9721	2,32838	4,69484	669,16	35632,7	213
214	45796	9800344	14,6287	5,9814	2,33041	4,67290	672,30	35968,1	214
215	46225	9938375	14,6629	5,9907	2,33244	4,65116	675,44	36305,0	215
216	46656	10077696	14,6969	6,0000	2,33445	4,62963	678,58	36643,5	216
217	47089	10218313	14,7309	6,0092	2,33646	4,60829	681,73	36983,6	217
218	47524	10360232	14,7648	6,0185	2,33846	4,58716	684,87	37325,3	218
219	47961	10503459	14,7986	6,0277	2,34044	4,56621	688,01	37668,5	219
220	48400	10648000	14,8324	6,0368	2.34242	4,54545	691,15	38013,3	**220**
221	48841	10793861	14,8661	6,0459	2,34439	4,52489	694,29	38359,6	221
222	49284	10941048	14,8997	6,0550	2,34635	4,50450	697,43	38707,6	222
223	49729	11089567	14,9332	6,0641	2,34830	4,48430	700,58	39057,1	223
224	50176	11239424	14,9666	6,0732	2,35025	4,46429	703,72	39408,1	224
225	50625	11390625	15,0000	6,0822	2,35218	4,44444	706,86	39760,8	225
226	51076	11543176	15,0333	6,0912	2,35411	4,42478	710,00	40115,0	226
227	51529	11697083	15,0665	6,1002	2,35603	4,40529	713,14	40470,8	227
228	51984	11852352	15,0997	6,1091	2,35793	4,38596	716,28	40828,1	228
229	52441	12008989	15,1327	6,1180	2,35984	4,36681	719,42	41187,1	229
230	52900	12167000	15,1658	6,1269	2,36173	4,34783	722,57	41547,6	**230**
231	53361	12326391	15,1987	6,1358	2,36361	4,32900	725,71	41909,6	231
232	53824	12487168	15,2315	6,1446	2,36549	4,31034	728,85	42273,3	232
233	54289	12649337	15,2643	6,1534	2,36736	4,29185	731,99	42638,5	233
234	54756	12812904	15,2971	6,1622	2,36922	4,27350	735,13	43005,3	234
235	55225	12977875	15,3297	6,1710	2,37107	4,25532	738,27	43373,6	235
236	55696	13144256	15,3623	6,1797	2,37291	4,23729	741,42	43743,5	236
237	56169	13312053	15,3948	6,1885	2,37475	4,21941	744,56	44115,0	237
238	56644	13481272	15,4272	6,1972	2,37658	4,20168	747,70	44488,1	238
239	57121	13651919	15,4596	6,2058	2,37840	4,18410	750,84	44862,7	239
240	57600	13824000	15,4919	6,2145	2,38021	4,16667	753,98	45238,9	**240**
241	58081	13997521	15,5242	6,2231	2,38202	4,14938	757,12	45616,7	241
242	58564	14172488	15,5563	6,2317	2,38382	4,13223	760,27	45996,1	242
243	59049	14348907	15,5885	6,2403	2,38561	4,11523	763,41	46377,0	243
244	59536	14526784	15,6205	6,2488	2,38739	4,09836	766,55	46759,5	244
245	60025	14706125	15,6525	6,2573	2,38917	4,08163	769,69	47143,5	245
246	60516	14886936	15,6844	6,2658	2,39094	4,06504	772,83	47529,2	246
247	61009	15069223	15,7162	6,2743	2,39270	4,04858	775,97	47916,4	247
248	61504	15252992	15,7480	6,2828	2,39445	4,03226	779,11	48305,1	248
249	62001	15438249	15,7797	6,2912	2,39620	4,01606	782,26	48695,5	249
250	62500	15625000	15,8114	6,2996	2,39794	4,00000	785,40	49087,4	**250**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
250	62500	15625000	15,8114	6,2996	2,39794	4,00000	785,40	49087,4	**250**
251	63001	15813251	15,8430	6,3080	2,39967	3,98406	788,54	49480,9	251
252	63504	16003008	15,8745	6,3164	2,40140	3,96825	791,68	49875,9	252
253	64009	16194277	15,9060	6,3247	2,40312	3,95257	794,82	50272,6	253
254	64516	16387064	15,9374	6,3330	2,40483	3,93701	797,96	50670,7	254
255	65025	16581375	15,9687	6,3413	2,40654	3,92157	801,11	51070,5	255
256	65536	16777216	16,0000	6,3496	2,40824	3,90625	804,25	51471,9	256
257	66049	16974593	16,0312	6,3579	2,40993	3,89105	807,39	51874,8	257
258	66564	17173512	16,0624	6,3661	2,41162	3,87597	810,53	52279,2	258
259	67081	17373979	16,0935	6,3743	2,41330	3,86100	813,67	52685,3	259
260	67600	17576000	16,1245	6,3825	2,41497	3,84615	816,81	53092,9	**260**
261	68121	17779581	16,1555	6,3907	2,41664	3,83142	819,96	53502,1	261
262	68644	17984728	16,1864	6,3988	2,41830	3,81679	823,10	53912,9	262
263	69169	18191447	16,2173	6,4070	2,41996	3,80228	826,24	54325,2	263
264	69696	18399744	16,2481	6,4151	2,42160	3,78788	829,38	54739,1	264
265	70225	18609625	16,2788	6,4232	2,42325	3,77358	832,52	55154,6	265
266	70756	18821096	16,3095	6,4312	2,42488	3,75940	835,66	55571,6	266
267	71289	19034163	16,3401	6,4393	2,42651	3,74532	838,81	55990,3	267
268	71824	19248832	16,3707	6,4473	2,42813	3,73134	841,95	56410,4	268
269	72361	19465109	16,4012	6,4553	2,42975	3,71747	845,09	56832,2	269
270	72900	19683000	16,4317	6,4633	2,43136	3,70370	848,23	57255,5	**270**
271	73441	19902511	16,4621	6,4713	2,43297	3,69004	851,37	57680,4	271
272	73984	20123648	16,4924	6,4792	2,43457	3,67647	854,51	58106,9	272
273	74529	20346417	16,5227	6,4872	2,43616	3,66300	857,65	58534,9	273
274	75076	20570824	16,5529	6,4951	2,43775	3,64964	860,80	58964,6	274
275	75625	20796875	16,5831	6,5030	2,43933	3,63636	863,94	59395,7	275
276	76176	21024576	16,6132	6,5108	2,44091	3,62319	867,08	59828,5	276
277	76729	21253933	16,6433	6,5187	2,44248	3,61011	870,22	60262,8	277
278	77284	21484952	16,6733	6,5265	2,44404	3,59712	873,36	60698,7	278
279	77841	21717639	16,7033	6,5343	2,44560	3,58423	876,50	61136,2	279
280	78400	21952000	16,7332	6,5421	2,44716	3,57143	879,65	61575,2	**280**
281	78961	22188041	16,7631	6,5499	2,44871	3,55872	882,79	62015,8	281
282	79524	22425768	16,7929	6,5577	2,45025	3,54610	885,93	62458,0	282
283	80089	22665187	16,8226	6,5654	2,45179	3,53357	889,07	62901,8	283
284	80656	22906304	16,8523	6,5731	2,45332	3,52113	892,21	63347,1	284
285	81225	23149125	16,8819	6,5808	2,45484	3,50877	895,35	63794,0	285
286	81796	23393656	16,9115	6,5885	2,45637	3,49650	898,50	64242,4	286
287	82369	23639903	16,9411	6,5962	2,45788	3,48432	901,64	64692,5	287
288	82944	23887872	16,9706	6,6039	2,45939	3,47222	904,78	65144,1	288
289	83521	24137569	17,0000	6,6115	2,46090	3,46021	907,92	65597,2	289
290	84100	24389000	17,0294	6,6191	2,46240	3,44828	911,06	66052,0	**290**
291	84681	24642171	17,0587	6,6267	2,46389	3,43643	914,20	66508,3	291
292	85264	24897088	17,0880	6,6343	2,46538	3,42466	917,35	66966,2	292
293	85849	25153757	17,1172	6,6419	2,46687	3,41297	920,49	67425,6	293
294	86436	25412184	17,1464	6,6494	2,46835	3,40136	923,63	67886,7	294
295	87025	25672375	17,1756	6,6569	2,46982	3,38983	926,77	68349,3	295
296	87616	25934336	17,2047	6,6644	2,47129	3,37838	929,91	68813,4	296
297	88209	26198073	17,2337	6,6719	2,47276	3,36700	933,05	69279,2	297
298	88804	26463592	17,2627	6,6794	2,47422	3,35570	936,19	69746,5	298
299	89401	26730899	17,2916	6,6869	2,47567	3,34448	939,34	70215,4	299
300	90000	27000000	17,3205	6,6943	2,47712	3,33333	942,48	70685,8	**300**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
300	90000	27000000	17,3205	6,6943	2,47712	3,33333	942,48	70685,8	**300**
301	90601	27270901	17,3494	6,7018	2,47857	3,32226	945,62	71157,9	301
302	91204	27543608	17,3781	6,7092	2,48001	3,31126	948,76	71631,5	302
303	91809	27818127	17,4069	6,7166	2,48144	3,30033	951,90	72106,6	303
304	92416	28094464	17,4356	6,7240	2,48287	3,28947	955,04	72583,4	304
305	93025	28372625	17,4642	6,7313	2,48430	3,27869	958,19	73061,7	305
306	93636	28652616	17,4929	6,7387	2,48572	3,26797	961,33	73541,5	306
307	94249	28934443	17,5214	6,7460	2,48714	3,25733	964,47	74023,0	307
308	94864	29218112	17,5499	6,7533	2,48855	3,24675	967,61	74506,0	308
309	95481	29503629	17,5784	6,7606	2,48996	3,23625	970,75	74990,6	309
310	96100	29791000	17,6068	6,7679	2,49136	3,22581	973,89	75476,8	**310**
311	96721	30080231	17,6352	6,7752	2,49276	3,21543	977,04	75964,5	311
312	97344	30371328	17,6635	6,7824	2,49415	3,20513	980,18	76453,8	312
313	97969	30664297	17,6918	6,7897	2,49554	3,19489	983,32	76944,7	313
314	98596	30959144	17,7200	6,7969	2,49693	3,18471	986,46	77437,1	314
315	99225	31255875	17,7482	6,8041	2,49831	3,17460	989,60	77931,1	315
316	99856	31554496	17,7764	6,8113	2,49969	3,16456	992,74	78426,7	316
317	100489	31855013	17,8045	6,8185	2,50106	3,15457	995,88	78923,9	317
318	101124	32157432	17,8326	6,8256	2,50243	3,14465	999,03	79422,6	318
319	101761	32461759	17,8606	6,8328	2,50379	3,13480	1002,2	79922,9	319
320	102400	32768000	17,8885	6,8399	2,50515	3,12500	1005,3	80424,8	**320**
321	103041	33076161	17,9165	6,8470	2,50651	3,11526	1008,5	80928,2	321
322	103684	33386248	17,9444	6,8541	2,50786	3,10559	1011,6	81433,2	322
323	104329	33698267	17,9722	6,8612	2,50920	3,09598	1014,7	81939,8	323
324	104976	34012224	18,0000	6,8683	2,51055	3,08642	1017,9	82448,0	324
325	105625	34328125	18,0278	6,8753	2,51188	3,07692	1021,0	82957,7	325
326	106276	34645976	18,0555	6,8824	2,51322	3,06748	1024,2	83469,0	326
327	106929	34965783	18,0831	6,8894	2,51455	3,05810	1027,3	83981,8	327
328	107584	35287552	18,1108	6,8964	2,51587	3,04878	1030,4	84496,3	328
329	108241	35611289	18,1384	6,9034	2,51720	3,03951	1033,6	85012,3	329
330	108900	35937000	18,1659	6,9104	2,51851	3,03030	1036,7	85529,9	**330**
331	109561	36264691	18,1934	6,9174	2,51983	3,02115	1039,9	86049,0	331
332	110224	36594368	18,2209	6,9244	2,52114	3,01205	1043,0	86569,7	332
333	110889	36926037	18,2483	6,9313	2,52244	3,00300	1046,2	87092,0	333
334	111556	37259704	18,2757	6,9382	2,52375	2,99401	1049,3	87615,9	334
335	112225	37595375	18,3030	6,9451	2,52504	2,98507	1052,4	88141,3	335
336	112896	37933056	18,3303	6,9521	2,52634	2,97619	1055,6	88668,3	336
337	113569	38272753	18,3576	6,9589	2,52763	2,96736	1058,7	89196,9	337
338	114244	38614472	18,3848	6,9658	2,52892	2,95858	1061,9	89727,0	338
339	114921	38958219	18,4120	6,9727	2,53020	2,94985	1065,0	90258,7	339
340	115600	39304000	18,4391	6,9795	2,53148	2,94118	1068,1	90792,0	**340**
341	116281	39651821	18,4662	6,9864	2,53275	2,93255	1071,3	91326,9	341
342	116964	40001688	18,4932	6,9932	2,53403	2,92398	1074,4	91863,3	342
343	117649	40353607	18,5203	7,0000	2,53529	2,91545	1077,6	92401,3	343
344	118336	40707584	18,5472	7,0068	2,53656	2,90698	1080,7	92940,9	344
345	119025	41063625	18,5742	7,0136	2,53782	2,89855	1083,8	93482,0	345
346	119716	41421736	18,6011	7,0203	2,53908	2,89017	1087,0	94024,7	346
347	120409	41781923	18,6279	7,0271	2,54033	2,88184	1090,1	94569,0	347
348	121104	42144192	18,6548	7,0338	2,54158	2,87356	1093,3	95114,9	348
349	121801	42508549	18,6815	7,0406	2,54283	2,86533	1096,4	95662,3	349
350	122500	42875000	18,7083	7,0473	2,54407	2,85714	1099,6	96211,3	**350**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
350	122500	42875000	18,7083	7,0473	2,54407	2,85714	1099,6	96211,3	**350**
351	123201	43243551	18,7350	7,0540	2,54531	2,84900	1102,7	96761,8	351
352	123904	43614208	18,7617	7,0607	2,54654	2,84091	1105,8	97314,0	352
353	124609	43986977	18,7883	7,0674	2,54777	2,83286	1109,0	97867,7	353
354	125316	44361864	18,8149	7,0740	2,54900	2,82486	1112,1	98423,0	354
355	126025	44738875	18,8414	7,0807	2,55023	2,81690	1115,3	98979,8	355
356	126736	45118016	18,8680	7,0873	2,55145	2,80899	1118,4	99538,2	356
357	127449	45499293	18,8944	7,0940	2,55267	2,80112	1121,5	100098	357
358	128164	45882712	18,9209	7,1006	2,55388	2,79330	1124,7	100660	358
359	128881	46268279	18,9473	7,1072	2,55509	2,78552	1127,8	101223	359
360	129600	46656000	18,9737	7,1138	2,55630	2,77778	1131,0	101788	**360**
361	130321	47045881	19,0000	7,1204	2,55751	2,77008	1134,1	102354	361
362	131044	47437928	19,0263	7,1269	2,55871	2,76243	1137,3	102922	362
363	131769	47832147	19,0526	7,1335	2,55991	2,75482	1140,4	103491	363
364	132496	48228544	19,0788	7,1400	2,56110	2,74725	1143,5	104062	364
365	133225	48627125	19,1050	7,1466	2,56229	2,73973	1146,7	104635	365
366	133956	49027896	19,1311	7,1531	2,56348	2,73224	1149,8	105209	366
367	134689	49430863	19,1572	7,1596	2,56467	2,72480	1153,0	105785	367
368	135424	49836032	19,1833	7,1661	2,56585	2,71739	1156,1	106362	368
369	136161	50243409	19,2094	7,1726	2,56703	2,71003	1159,2	106941	369
370	136900	50653000	19,2354	7,1791	2,56820	2,70270	1162,4	107521	**370**
371	137641	51064811	19,2614	7,1855	2,56937	2,69542	1165,5	108103	371
372	138384	51478848	19,2873	7,1920	2,57054	2,68817	1168,7	108687	372
373	139129	51895117	19,3132	7,1984	2,57171	2,68097	1171,8	109272	373
374	139876	52313624	19,3391	7,2048	2,57287	2,67380	1175,0	109858	374
375	140625	52734375	19,3649	7,2112	2,57403	2,66667	1178,1	110447	375
376	141376	53157376	19,3907	7,2177	2,57519	2,65957	1181,2	111036	376
377	142129	53582633	19,4165	7,2240	2,57634	2,65252	1184,4	111628	377
378	142884	54010152	19,4422	7,2304	2,57749	2,64550	1187,5	112221	378
379	143641	54439939	19,4679	7,2368	2,57864	2,63852	1190,7	112815	379
380	144400	54872000	19,4936	7,2432	2,57978	2,63158	1193,8	113411	**380**
381	145161	55306341	19,5192	7,2495	2,58092	2,62467	1196,9	114009	381
382	145924	55742968	19,5448	7,2558	2,58206	2,61780	1200,1	114608	382
383	146689	56181887	19,5704	7,2622	2,58320	2,61097	1203,2	115209	383
384	147456	56623104	19,5959	7,2685	2,58433	2,60417	1206,4	115812	384
385	148225	57066625	19,6214	7,2748	2,58546	2,59740	1209,5	116416	385
386	148996	57512456	19,6469	7,2811	2,58659	2,59067	1212,7	117021	386
387	149769	57960603	19,6723	7,2874	2,58771	2,58398	1215,8	117628	387
388	150544	58411072	19,6977	7,2936	2,58883	2,57732	1218,9	118237	388
389	151321	58863869	19,7231	7,2999	2,58995	2,57069	1222,1	118847	389
390	152100	59319000	19,7484	7,3061	2,59106	2,56410	1225,2	119459	**390**
391	152881	59776471	19,7737	7,3124	2,59218	2,55754	1228,4	120072	391
392	153664	60236288	19,7990	7,3186	2,59329	2,55102	1231,5	120687	392
393	154449	60698457	19,8242	7,3248	2,59439	2,54453	1234,6	121304	393
394	155236	61162984	19,8494	7,3310	2,59550	2,53807	1237,8	121922	394
395	156025	61629875	19,8746	7,3372	2,59660	2,53165	1240,9	122542	395
396	156816	62099136	19,8997	7,3434	2,59770	2,52525	1244,1	123163	396
397	157609	62570773	19,9249	7,3496	2,59879	2,51889	1247,2	123786	397
398	158404	63044792	19,9499	7,3558	2,59988	2,51256	1250,4	124410	398
399	159201	63521199	19,9750	7,3619	2,60097	2,50627	1253,5	125036	399
400	160000	64000000	20,0000	7,3681	2,60206	2,50000	1256,6	125664	**400**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
400	160000	64000000	20,0000	7,3681	2,60206	2,50000	1256,6	125664	**400**
401	160801	64481201	20,0250	7,3742	2,60314	2,49377	1259,8	126293	401
402	161604	64964808	20,0499	7,3803	2,60423	2,48756	1262,9	126923	402
403	162409	65450827	20,0749	7,3864	2,60531	2,48139	1266,1	127556	403
404	163216	65939264	20,0998	7,3925	2,60638	2,47525	1269,2	128190	404
405	164025	66430125	20,1246	7,3986	2,60746	2,46914	1272,3	128825	405
406	164836	66923416	20,1494	7,4047	2,60853	2,46305	1275,5	129462	406
407	165649	67419143	20,1742	7,4108	2,60959	2,45700	1278,6	130100	407
408	166464	67917312	20,1990	7,4169	2,61066	2,45098	1281,8	130741	408
409	167281	68417929	20,2237	7,4229	2,61172	2,44499	1284,9	131382	409
410	168100	68921000	20,2485	7,4290	2,61278	2,43902	1288,1	132025	**410**
411	168921	69426531	20,2731	7,4350	2,61384	2,43309	1291,2	132670	411
412	169744	69934528	20,2978	7,4410	2,61490	2,42718	1294,3	133317	412
413	170569	70444997	20,3224	7,4470	2,61595	2,42131	1297,5	133965	413
414	171396	70957944	20,3470	7,4530	2,61700	2,41546	1300,6	134614	414
415	172225	71473375	20,3715	7,4590	2,61805	2,40964	1303,8	135265	415
416	173056	71991296	20,3961	7,4650	2,61909	2,40385	1306,9	135918	416
417	173889	72511713	20,4206	7,4710	2,62014	2,39808	1310,0	136572	417
418	174724	73034632	20,4450	7,4770	2,62118	2,39234	1313,2	137228	418
419	175561	73560059	20,4695	7,4829	2,62221	2,38663	1316,3	137885	419
420	176400	74088000	20,4939	7,4889	2,62325	2,38095	1319,5	138544	**420**
421	177241	74618461	20,5183	7,4948	2,62428	2,37530	1322,6	139205	421
422	178084	75151448	20,5426	7,5007	2,62531	2,36967	1325,8	139867	422
423	178929	75686967	20,5670	7,5067	2,62634	2,36407	1328,9	140531	423
424	179776	76225024	20,5913	7,5126	2,62737	2,35849	1332,0	141196	424
425	180625	76765625	20,6155	7,5185	2,62839	2,35294	1335,2	141863	425
426	181476	77308776	20,6398	7,5244	2,62941	2,34742	1338,3	142531	426
427	182329	77854483	20,6640	7,5302	2,63043	2,34192	1341,5	143201	427
428	183184	78402752	20,6882	7,5361	2,63144	2,33645	1344,6	143872	428
429	184041	78953589	20,7123	7,5420	2,63246	2,33100	1347,7	144545	429
430	184900	79507000	20,7364	7,5478	2,63347	2,32558	1350,9	145220	**430**
431	185761	80062991	20,7605	7,5537	2,63448	2,32019	1354,0	145896	431
432	186624	80621568	20,7846	7,5595	2,63548	2,31481	1357,2	146574	432
433	187489	81182737	20,8087	7,5654	2,63649	2,30947	1360,3	147254	433
434	188356	81746504	20,8327	7,5712	2,63749	2,30415	1363,5	147934	434
435	189225	82312875	20,8567	7,5770	2,63849	2,29885	1366,6	148617	435
436	190096	82881856	20,8806	7,5828	2,63949	2,29358	1369,7	149301	436
437	190969	83453453	20,9045	7,5886	2,64048	2,28833	1372,9	149987	437
438	191844	84027672	20,9284	7,5944	2,64147	2,28311	1376,0	150674	438
439	192721	84604519	20,9523	7,6001	2,64246	2,27790	1379,2	151363	439
440	193600	85184000	20,9762	7,6059	2,64345	2,27273	1382,3	152053	**440**
441	194481	85766121	21,0000	7,6117	2,64444	2,26757	1385,4	152745	441
442	195364	86350888	21,0238	7,6174	2,64542	2,26244	1388,6	153439	442
443	196249	86938307	21,0476	7,6232	2,64640	2,25734	1391,7	154134	443
444	197136	87528384	21,0713	7,6289	2,64738	2,25225	1394,9	154830	444
445	198025	88121125	21,0950	7,6346	2,64836	2,24719	1398,0	155528	445
446	198916	88716536	21,1187	7,6403	2,64933	2,24215	1401,2	156228	446
447	199809	89314623	21,1424	7,6460	2,65031	2,23714	1404,3	156930	447
448	200704	89915392	21,1660	7,6517	2,65128	2,23214	1407,4	157633	448
449	201601	90518849	21,1896	7,6574	2,65225	2,22717	1410,6	158337	449
450	202500	91125000	21,2132	7,6631	2,65321	2,22222	1413,7	159043	**450**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
450	202500	91125000	21,2132	7,6631	2,65321	2,22222	1413,7	159043	**450**
451	203401	91733851	21,2368	7,6688	2,65418	2,21729	1416,9	159751	451
452	204304	92345408	21,2603	7,6744	2,65514	2,21239	1420,0	160460	452
453	205209	92959677	21,2838	7,6801	2,65610	2,20751	1423,1	161171	453
454	206116	93576664	21,3073	7,6857	2,65706	2,20264	1426,3	161883	454
455	207025	94196375	21,3307	7,6914	2,65801	2,19780	1429,4	162597	455
456	207936	94818816	21,3542	7,6970	2,65896	2,19298	1432,6	163313	456
457	208849	95443993	21,3776	7,7026	2,65992	2,18818	1435,7	164030	457
458	209764	96071912	21,4009	7,7082	2,66087	2,18341	1438,8	164748	458
459	210681	96702579	21,4243	7,7138	2,66181	2,17865	1442,0	165468	459
460	211600	97336000	21,4476	7,7194	2,66276	2,17391	1445,1	166190	**460**
461	212521	97972181	21,4709	7,7250	2,66370	2,16920	1448,3	166914	461
462	213444	98611128	21,4942	7,7306	2,66464	2,16450	1451,4	167639	462
463	214369	99252847	21,5174	7,7362	2,66558	2,15983	1454,6	168365	463
464	215296	99897344	21,5407	7,7418	2,66652	2,15517	1457,7	169093	464
465	216225	100544625	21,5639	7,7473	2,66745	2,15054	1460,8	169823	465
466	217156	101194696	21,5870	7,7529	2,66839	2,14592	1464,0	170554	466
467	218089	101847563	21,6102	7,7584	2,66932	2,14133	1467,1	171287	467
468	219024	102503232	21,6333	7,7639	2,67025	2,13675	1470,3	172021	468
469	219961	103161709	21,6564	7,7695	2,67117	2,13220	1473,4	172757	469
470	220900	103823000	21,6795	7,7750	2,67210	2,12766	1476,5	173494	**470**
471	221841	104487111	21,7025	7,7805	2,67302	2,12314	1479,7	174234	471
472	222784	105154048	21,7256	7,7860	2,67394	2,11864	1482,8	174974	472
473	223729	105823817	21,7486	7,7915	2,67486	2,11416	1486,0	175716	473
474	224676	106496424	21,7715	7,7970	2,67578	2,10970	1489,1	176460	474
475	225625	107171875	21,7945	7,8025	2,67669	2,10526	1492,3	177205	475
476	226576	107850176	21,8174	7,8079	2,67761	2,10084	1495,4	177952	476
477	227529	108531333	21,8403	7,8134	2,67852	2,09644	1498,5	178701	477
478	228484	109215352	21,8632	7,8188	2,67943	2,09205	1501,7	179451	478
479	229441	109902239	21,8861	7,8243	2,68034	2,08768	1504,8	180203	479
480	230400	110592000	21,9089	7,8297	2,68124	2,08333	1508,0	180956	**480**
481	231361	111284641	21,9317	7,8352	2,68215	2,07900	1511,1	181711	481
482	232324	111980168	21,9545	7,8406	2,68305	2,07469	1514,2	182467	482
483	233289	112678587	21,9773	7,8460	2,68395	2,07039	1517,4	183225	483
484	234256	113379904	22,0000	7,8514	2,68485	2,06612	1520,5	183984	484
485	235225	114084125	22,0227	7,8568	2,68574	2,06186	1523,7	184745	485
486	236196	114791256	22,0454	7,8622	2,68664	2,05761	1526,8	185508	486
487	237169	115501303	22,0681	7,8676	2,68753	2,05339	1530,0	186272	487
488	238144	116214272	22,0907	7,8730	2,68842	2,04918	1533,1	187038	488
489	239121	116930169	22,1133	7,8784	2,68931	2,04499	1536,2	187805	489
490	240100	117649000	22,1359	7,8837	2,69020	2,04082	1539,4	188574	**490**
491	241081	118370771	22,1585	7,8891	2,69108	2,03666	1542,5	189345	491
492	242064	119095488	22,1811	7,8944	2,69197	2,03252	1545,7	190117	492
493	243049	119823157	22,2036	7,8998	2,69285	2,02840	1548,8	190890	493
494	244036	120553784	22,2261	7,9051	2,69373	2,02429	1551,9	191665	494
495	245025	121287375	22,2486	7,9105	2,69461	2,02020	1555,1	192442	495
496	246016	122023936	22,2711	7,9158	2,69548	2,01613	1558,2	193221	496
497	247009	122763473	22,2935	7,9211	2,69636	2,01207	1561,4	194000	497
498	248004	123505992	22,3159	7,9264	2,69723	2,00803	1564,5	194782	498
499	249001	124251499	22,3383	7,9317	2,69810	2,00401	1567,7	195565	499
500	250000	125000000	22,3607	7,9370	2,69897	2,00000	1570,8	196350	**500**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
500	250000	125000000	22,3607	7,9370	2,69897	2,00000	1570,8	196350	**500**
501	251001	125751501	22,3830	7,9423	2,69984	1,99601	1573,9	197136	501
502	252004	126506008	22,4054	7,9476	2,70070	1,99203	1577,1	197923	502
503	253009	127263527	22,4277	7,9528	2,70157	1,98807	1580,2	198713	503
504	254016	128024064	22,4499	7,9581	2,70243	1,98413	1583,4	199504	504
505	255025	128787625	22,4722	7,9634	2,70329	1,98020	1586,5	200296	505
506	256036	129554216	22,4944	7,9686	2,70415	1,97628	1589,6	201090	506
507	257049	130323843	22,5167	7,9739	2,70501	1,97239	1592,8	201886	507
508	258064	131096512	22,5389	7,9791	2,70586	1,96850	1595,0	202683	508
509	259081	131872229	22,5610	7,9843	2,70672	1,96464	1599,1	203482	509
510	260100	132651000	22,5832	7,9896	2,70757	1,96078	1602,2	204282	**510**
511	261121	133432831	22,6053	7,9948	2,70842	1,95695	1605,4	205084	511
512	262144	134217728	22,6274	8,0000	2,70927	1,95312	1608,5	205887	512
513	263169	135005697	22,6495	8,0052	2,71012	1,94932	1611,6	206692	513
514	264196	135796744	22,6716	8,0104	2,71096	1,94553	1614,8	207499	514
515	265225	136590875	22,6936	8,0156	2,71181	1,94175	1617,9	208307	515
516	266256	137388096	22,7156	8,0208	2,71265	1,93798	1621,1	209117	516
517	267289	138188413	22,7376	8,0260	2,71349	1,93424	1624,2	209928	517
518	268324	138991832	22,7596	8,0311	2,71433	1,93050	1627,3	210741	518
519	269361	139798359	22,7816	8,0363	2,71517	1,92678	1630,5	211556	519
520	270400	140608000	22,8035	8,0415	2,71600	1,92308	1633,6	212372	**520**
521	271441	141420761	22,8254	8,0466	2,71684	1,91939	1636,8	213189	521
522	272484	142236648	22,8473	8,0517	2,71767	1,91571	1639,9	214008	522
523	273529	143055667	22,8692	8,0569	2,71850	1,91205	1643,1	214829	523
524	274576	143877824	22,8910	8,0620	2,71933	1,90840	1646,2	215651	524
525	275625	144703125	22,9129	8,0671	2,72016	1,90476	1649,3	216475	525
526	276676	145531576	22,9347	8,0723	2,72099	1,90114	1652,5	217301	526
527	277729	146363183	22,9565	8,0774	2,72181	1,89753	1655,6	218128	527
528	278784	147197952	22,9783	8,0825	2,72263	1,89394	1658,8	218956	528
529	279841	148035889	23,0000	8,0876	2,72346	1,89036	1661,9	219787	529
530	280900	148877000	23,0217	8,0927	2,72428	1,88679	1665,0	220618	**530**
531	281961	149721291	23,0434	8,0978	2,72509	1,88324	1668,2	221452	531
532	283024	150568768	23,0651	8,1028	2,72591	1,87970	1671,3	222287	532
533	284089	151419437	23,0868	8,1079	2,72673	1,87617	1674,5	223123	533
534	285156	152273304	23,1084	8,1130	2,72754	1,87266	1677,6	223961	534
535	286225	153130375	23,1301	8,1180	2,72835	1,86916	1680,8	224801	535
536	287296	153990656	23,1517	8,1231	2,72916	1,86567	1683,9	225642	536
537	288369	154854153	23,1733	8,1281	2,72997	1,86220	1687,0	226484	537
538	289444	155720872	23,1948	8,1332	2,73078	1,85874	1690,2	227329	538
539	290521	156590819	23,2164	8,1382	2,73159	1,85529	1693,3	228175	539
540	291600	157464000	23,2379	8,1433	2,73239	1,85185	1696,5	229022	**540**
541	292681	158340421	23,2594	8,1483	2,73320	1,84843	1699,6	229871	541
542	293764	159220088	23,2809	8,1533	2,73400	1,84502	1702,7	230722	542
543	294849	160103007	23,3024	8,1583	2,73480	1,84162	1705,9	231574	543
544	295936	160989184	23,3238	8,1633	2,73560	1,83824	1709,0	232428	544
545	297025	161878625	23,3452	8,1683	2,73640	1,83486	1712,2	233283	545
546	298116	162771336	23,3666	8,1733	2,73719	1,83150	1715,3	234140	546
547	299209	163667323	23,3880	8,1783	2,73799	1,82815	1718,5	234998	547
548	300304	164566592	23,4094	8,1833	2,73878	1,82482	1721,6	235858	548
549	301401	165469149	23,4307	8,1882	2,73957	1,82149	1724,7	236720	549
550	302500	166375000	23,4521	8,1932	2,74036	1,81818	1727,9	237583	**550**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	π n	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
550	302500	166375000	23,4521	8,1932	2,74036	1,81818	1727,9	237583	**550**
551	303601	167284151	23,4734	8,1982	2,74115	1,81488	1731,0	238448	551
552	304704	168196608	23,4947	8,2031	2,74194	1,81159	1734,2	239314	552
553	305809	169112377	23,5160	8,2081	2,74273	1,80832	1737,3	240182	553
554	306916	170031464	23,5372	8,2130	2,74351	1,80505	1740,4	241051	554
555	308025	170953875	23,5584	8,2180	2,74429	1,80180	1743,6	241922	555
556	309136	171879616	23,5797	8,2229	2,74507	1,79856	1746,7	242795	556
557	310249	172808693	23,6008	8,2278	2,74586	1,79533	1749,9	243669	557
558	311364	173741112	23,6220	8,2327	2,74663	1,79211	1753,0	244545	558
559	312481	174676879	23,6432	8,2377	2,74741	1,78891	1756,2	245422	559
560	313600	175616000	23,6643	8,2426	2,74819	1,78571	1759,3	246301	**560**
561	314721	176558481	23,6854	8,2475	2,74896	1,78253	1762,4	247181	561
562	315844	177504328	23,7065	8,2524	2,74974	1,77936	1765,6	248063	562
563	316969	178453547	23,7276	8,2573	2,75051	1,77620	1768,7	248947	563
564	318096	179406144	23,7487	8,2621	2,75128	1,77305	1771,9	249832	564
565	319225	180362125	23,7697	8,2670	2,75205	1,76991	1775,0	250719	565
566	320356	181321496	23,7908	8,2719	2,75282	1,76678	1778,1	251607	566
567	321489	182284263	23,8118	8,2768	2,75358	1.76367	1781,3	252497	567
568	322624	183250432	23,8328	8,2816	2,75435	1,76056	1784,4	253388	568
569	323761	184220009	23,8537	8,2865	2,75511	1,75747	1787,6	254281	569
570	324900	185193000	23,8747	8,2913	2,75587	1,75439	1790,7	255176	**570**
571	326041	186169411	23,8956	8,2962	2,75664	1,75131	1793,8	256072	571
572	327184	187149248	23,9165	8,3010	2,75740	1,74825	1797,0	256970	572
573	328329	188132517	23,9374	8,3059	2,75815	1,74520	1800,1	257869	573
574	329476	189119224	23,9583	8,3107	2,75891	1,74216	1803,3	258770	574
575	330625	190109375	23,9792	8,3155	2,75967	1,73913	1806,4	259672	575
576	331776	191102976	24,0000	8,3203	2,76042	1,73611	1809,6	260576	576
577	332929	192100033	24,0208	8,3251	2,76118	1,73310	1812,7	261482	577
578	334084	193100552	24,0416	8,3300	2.76193	1,73010	1815,8	262389	578
579	335241	194104539	24,0624	8,3348	2,76268	1,72712	1819,0	263298	579
580	336400	195112000	24,0832	8,3396	2,76343	1,72414	1822,1	264208	**580**
581	337561	196122941	24,1039	8,3443	2,76418	1,72117	1825,3	265120	581
582	338724	197137368	24,1247	8,3491	2,76492	1,71821	1828,4	266033	582
583	339889	198155287	24,1454	8,3539	2,76567	1,71527	1831,6	266948	583
584	341056	199176704	24,1661	8,3587	2,76641	1,71233	1834,7	267865	584
585	342225	200201625	24,1868	8,3634	2,76716	1,70940	1837,8	268783	585
586	343396	201230056	24,2074	8,3682	2,76790	1,70648	1841,0	269703	586
587	344569	202262003	24,2281	8,3730	2,76864	1,70358	1844,1	270624	587
588	345744	203297472	24,2487	8,3777	2,76938	1,70068	1847,3	271547	588
589	346921	204336469	24,2693	8,3825	2,77012	1,69779	1850,4	272471	589
590	348100	205379000	24,2899	8,3872	2,77085	1,69492	1853,5	273397	**590**
591	349281	206425071	24,3105	8,3919	2,77159	1,69205	1856,7	274325	591
592	350464	207474688	24,3311	8,3967	2,77232	1,68919	1859,8	275254	592
593	351649	208527857	24,3516	8,4014	2,77305	1,68634	1863,0	276184	593
594	352836	209584584	24,3721	8,4061	2,77379	1,68350	1866,1	277117	594
595	354025	210644875	24,3926	8,4108	2,77452	1,68067	1869,2	278051	595
596	355216	211708736	24,4131	8,4155	2,77525	1,67785	1872,4	278986	596
597	356409	212776173	24,4336	8,4202	2,77597	1,67504	1875,5	279923	597
598	357604	213847192	24,4540	8,4249	2,77670	1,67224	1878,7	280862	598
599	358801	214921799	24,4745	8,4296	2,77743	1,66945	1881,8	281802	599
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	2,77815	1,66667	1885,0	282743	**600**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	2,77815	1,66667	1885,0	282743	**600**
601	361201	217081801	24,5153	8,4390	2,77887	1,66389	1888,1	283687	601
602	362404	218167208	24,5357	8,4437	2,77960	1,66113	1891,2	284631	602
603	363609	219256227	24,5561	8,4484	2,78032	1,65837	1894,4	285578	603
604	364816	220348864	24,5764	8,4530	2,78104	1,65563	1897,5	286526	604
605	366025	221445125	24,5967	8,4577	2,78176	1,65289	1900,7	287475	605
606	367236	222545016	24,6171	8,4623	2,78247	1,65017	1903,8	288426	606
607	368449	223648543	24,6374	8,4670	2,78319	1,64745	1906,9	289379	607
608	369664	224755712	24,6577	8,4716	2,78390	1,64474	1910,1	290333	608
609	370881	225866529	24,6779	8,4763	2,78462	1,64204	1913,2	291289	609
610	372100	226981000	24,6982	8,4809	2,78533	1,63934	1916,4	292247	**610**
611	373321	228099131	24,7184	8,4856	2,78604	1,63666	1919,5	293206	611
612	374544	229220928	24,7386	8,4902	2,78675	1,63399	1922,7	294166	612
613	375769	230346397	24,7588	8,4948	2,78746	1,63132	1925,8	295128	613
614	376996	231475544	24,7790	8,4994	2,78817	1,62866	1928,9	296092	614
615	378225	232608375	24,7992	8,5040	2,78888	1,62602	1932,1	297057	615
616	379456	233744896	24,8193	8,5086	2,78958	1,62338	1935,2	298024	616
617	380689	234885113	24,8395	8,5132	2,79029	1,62075	1938,4	298992	617
618	381924	236029032	24,8596	8,5178	2,79099	1,61812	1941,5	299962	618
619	383161	237176659	24,8797	8,5224	2,79169	1,61551	1944,6	300934	619
620	384400	238328000	24,8998	8,5270	2,79239	1,61290	1947,8	301907	**620**
621	385641	239483061	24,9199	8,5316	2,79309	1,61031	1950,9	302882	621
622	386884	240641848	24,9399	8,5362	2,79379	1,60772	1954,1	303858	622
623	388129	241804367	24,9600	8,5408	2,79449	1,60514	1957,2	304836	623
624	389376	242970624	24,9800	8,5453	2,79518	1,60256	1960,4	305815	624
625	390625	244140625	25,0000	8,5499	2,79588	1,60000	1963,5	306796	625
626	391876	245314376	25,0200	8,5544	2,79657	1,59744	1966,6	307779	626
627	393129	246491883	25,0400	8,5590	2,79727	1,59490	1969,8	308763	627
628	394384	247673152	25,0599	8,5635	2,79796	1,59236	1972,9	309748	628
629	395641	248858189	25,0799	8,5681	2,79865	1,58983	1976,1	310736	629
630	396900	250047000	25,0998	8,5726	2,79934	1,58730	1979,2	311725	**630**
631	398161	251239591	25,1197	8,5772	2,80003	1,58479	1982,3	312715	631
632	399424	252435968	25,1396	8,5817	2,80072	1,58228	1985,5	313707	632
633	400689	253636137	25,1595	8,5862	2,80140	1,57978	1988,6	314700	633
634	401956	254840104	25,1794	8,5907	2,80209	1,57729	1991,8	315696	634
635	403225	256047875	25,1992	8,5952	2,80277	1,57480	1994,9	316692	635
636	404496	257259456	25,2190	8,5997	2,80346	1,57233	1998,1	317690	636
637	405769	258474853	25,2389	8,6043	2,80414	1,56986	2001,2	318690	637
638	407044	259694072	25,2587	8,6088	2,80482	1,56740	2004,3	319692	638
639	408321	260917119	25,2784	8,6132	2,80550	1,56495	2007,5	320695	639
640	409600	262144000	25,2982	8,6177	2,80618	1,56250	2010,6	321699	**640**
641	410881	263374721	25,3180	8,6222	2,80686	1,56006	2013,8	322705	641
642	412164	264609288	25,3377	8,6267	2,80754	1,55763	2016,9	323713	642
643	413449	265847707	25,3574	8,6312	2,80821	1,55521	2020,0	324722	643
644	414736	267089984	25,3772	8,6357	2,80889	1,55280	2023,2	325733	644
645	416025	268336125	25,3969	8,6401	2,80956	1,55039	2026,3	326745	645
646	417316	269586136	25,4165	8,6446	2,81023	1,54799	2029,5	327759	646
647	418609	270840023	25,4362	8,6490	2,81090	1,54560	2032,6	328775	647
648	419904	272097792	25,4558	8,6535	2,81158	1,54321	2035,8	329792	648
649	421201	273359449	25,4755	8,6579	2,81224	1,54083	2038,9	330810	649
650	422500	274625000	25,4951	8,6624	2,81291	1,53846	2042,0	331831	**650**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
650	422500	274625000	25,4951	8,6624	2,81291	1,53846	2042,0	331831	**650**
651	423801	275894451	25,5147	8,6668	2,81358	1,53610	2045,2	332853	651
652	425104	277167808	25,5343	8,6713	2,81425	1,53374	2048,3	333876	652
653	426409	278445077	25,5539	8,6757	2,81491	1,53139	2051,5	334901	653
654	427716	279726264	25,5734	8,6801	2,81558	1,52905	2054,6	335927	654
655	429025	281011375	25,5930	8,6845	2,81624	1,52672	2057,7	336955	655
656	430336	282300416	25,6125	8,6890	2,81690	1,52439	2060,9	337985	656
657	431649	283593393	25,6320	8,6934	2,81757	1,52207	2064,0	339016	657
658	432964	284890312	25,6515	8,6978	2,81823	1,51976	2067,2	340049	658
659	434281	286191179	25,6710	8,7022	2,81889	1,51745	2070,3	341084	659
660	435600	287496000	25,6905	8,7066	2,81954	1,51515	2073,5	342119	**660**
661	436921	288804781	25,7099	8,7110	2,82020	1,51286	2076,6	343157	661
662	438244	290117528	25,7294	8,7154	2,82086	1,51057	2079,7	344196	662
663	439569	291434247	25,7488	8,7198	2,82151	1,50830	2082,9	345237	663
664	440896	292754944	25,7682	8,7241	2,82217	1,50602	2086,0	346279	664
665	442225	294079625	25,7876	8,7285	2,82282	1,50376	2089,2	347323	665
666	443556	295408296	25,8070	8,7329	2,82347	1,50150	2092,3	348368	666
667	444889	296740963	25,8263	8,7373	2,82413	1,49925	2095,4	349415	667
668	446224	298077632	25,8457	8,7416	2,82478	1,49701	2098,6	350464	668
669	447561	299418309	25,8650	8,7460	2,82543	1,49477	2101,7	351514	669
670	448900	300763000	25,8844	8,7503	2,82607	1,49254	2104,9	352565	**670**
671	450241	302111711	25,9037	8,7547	2,82672	1,49031	2108,0	353618	671
672	451584	303464448	25,9230	8,7590	2,82737	1,48810	2111,2	354673	672
673	452929	304821217	25,9422	8,7634	2,82802	1,48588	2114,3	355730	673
674	454276	306182024	25,9615	8,7677	2,82866	1,48368	2117,4	356788	674
675	455625	307546875	25,9808	8,7721	2,82930	1,48148	2120,6	357847	675
676	456976	308915776	26,0000	8,7764	2,82995	1,47929	2123,7	358908	676
677	458329	310288733	26,0192	8,7807	2,83059	1,47710	2126,9	359971	677
678	459684	311665752	26,0384	8,7850	2,83123	1,47493	2130,0	361035	678
679	461041	313046839	26,0576	8,7893	2,83187	1,47275	2133,1	362101	679
680	462400	314432000	26,0768	8,7937	2,83251	1,47059	2136,3	363168	**680**
681	463761	315821241	26,0960	8,7980	2,83315	1,46843	2139,4	364237	681
682	465124	317214568	26,1151	8,8023	2,83378	1,46628	2142,6	365308	682
683	466489	318611987	26,1343	8,8066	2,83442	1,46413	2145,7	366380	683
684	467856	320013504	26,1534	8,8109	2,83506	1,46199	2148,8	367453	684
685	469225	321419125	26,1725	8,8152	2,83569	1,45985	2152,0	368528	685
686	470596	322828856	26,1916	8,8194	2,83632	1,45773	2155,1	369605	686
687	471969	324242703	26,2107	8,8237	2,83696	1,45560	2158,3	370684	687
688	473344	325660672	26,2298	8,8280	2,83759	1,45349	2161,4	371764	688
689	474721	327082769	26,2488	8,8323	2,83822	1,45138	2164,6	372845	689
690	476100	328509000	26,2679	8,8366	2,83885	1,44928	2167,7	373928	**690**
691	477481	329939371	26,2869	8,8408	2,83948	1,44718	2170,8	375013	691
692	478864	331373888	26,3059	8,8451	2,84011	1,44509	2174,0	376099	692
693	480249	332812557	26,3249	8,8493	2.84073	1,44300	2177,1	377187	693
694	481636	334255384	26,3439	8,8536	2,84136	1,44092	2180,3	378276	694
695	483025	335702375	26,3629	8,8578	2,84198	1,43885	2183,4	379367	695
696	484416	337153536	26,3818	8,8621	2,84261	1,43678	2186,5	380459	696
697	485809	338608873	26,4008	8,8663	2,84323	1,43472	2189,7	381553	697
698	487204	340068392	26,4197	8,8706	2,84386	1,43266	2192,8	382649	698
699	488601	341532099	26,4386	8,8748	2,84448	1,43062	2196,0	383746	699
700	490000	343000000	26,4575	8,8790	2,84510	1,42857	2199,1	384845	**700**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
700	490000	343000000	26,4575	8,8790	2,84510	1,42857	2199,1	384845	**700**
701	491401	344472101	26,4764	8,8833	2,84572	1,42653	2202,3	385945	701
702	492804	345948408	26,4953	8,8875	2,84634	1,42450	2205,4	387047	702
703	494209	347428927	26,5141	8,8917	2,84696	1,42248	2208,5	388151	703
704	495616	348913664	26,5330	8,8959	2,84757	1,42045	2211,7	389256	704
705	497025	350402625	26,5518	8,9001	2,84819	1,41844	2214,8	390363	705
706	498436	351895816	26,5707	8,9043	2,84880	1,41643	2218,0	391471	706
707	499849	353393243	26,5895	8,9085	2,84942	1,41443	2221,1	392580	707
708	501264	354894912	26,6083	8,9127	2,85003	1,41243	2224,2	393692	708
709	502681	356400829	26,6271	8,9169	2,85065	1,41044	2227,4	394805	709
710	504100	357911000	26,6458	8,9211	2,85126	1,40845	2230,5	395919	**710**
711	505521	359425431	26,6646	8,9253	2,85187	1,40647	2233,7	397035	711
712	506944	360944128	26,6833	8,9295	2,85248	1,40449	2236,8	398153	712
713	508369	362467097	26,7021	8,9337	2,85309	1,40252	2240,0	399272	713
714	509796	363994344	26,7208	8,9378	2,85370	1,40056	2243,1	400393	714
715	511225	365525875	26,7395	8,9420	2,85431	1,39860	2246,2	401515	715
716	512656	367061696	26,7582	8,9462	2,85491	1,39665	2249,4	402639	716
717	514089	368601813	26,7769	8,9503	2,85552	1,39470	2252,5	403765	717
718	515524	370146232	26,7955	8,9545	2,85612	1,39276	2255,7	404892	718
719	516961	371694959	26,8142	8,9587	2,85673	1,39082	2258,8	406020	719
720	518400	373248000	26,8328	8,9628	2,85733	1,38889	2261,9	407150	**720**
721	519841	374805361	26,8514	8,9670	2,85794	1,38696	2265,1	408282	721
722	521284	376367048	26,8701	8,9711	2,85854	1,38504	2268,2	409415	722
723	522729	377933067	26,8887	8,9752	2,85914	1,38313	2271,4	410550	723
724	524176	379503424	26,9072	8,9794	2,85974	1,38122	2274,5	411687	724
725	525625	381078125	26,9258	8,9835	2,86034	1,37931	2277,7	412825	725
726	527076	382657176	26,9444	8,9876	2,86094	1,37741	2280,8	413965	726
727	528529	384240583	26,9629	8,9918	2,86153	1,37552	2283,9	415106	727
728	529984	385828352	26,9815	8,9959	2,86213	1,37363	2287,1	416248	728
729	531441	387420489	27,0000	9,0000	2,86273	1,37174	2290,2	417393	729
730	532900	389017000	27,0185	9,0041	2,86332	1,36986	2293,4	418539	**730**
731	534361	390617891	27,0370	9,0082	2,86392	1,36799	2296,5	419686	731
732	535824	392223168	27,0555	9,0123	2,86451	1,36612	2299,6	420835	732
733	537289	393832837	27,0740	9,0164	2,86510	1,36426	2302,8	421986	733
734	538756	395446904	27,0924	9,0205	2,86570	1,36240	2305,9	423138	734
735	540225	397065375	27,1109	9,0246	2,86629	1,36054	2309,1	424293	735
736	541696	398688256	27,1293	9,0287	2,86688	1,35870	2312,2	425447	736
737	543169	400315553	27,1477	9,0328	2,86747	1,35685	2315,4	426604	737
738	544644	401947272	27,1662	9,0369	2,86806	1,35501	2318,5	427762	738
739	546121	403583419	27,1846	9,0410	2,86864	1,35318	2321,6	428922	739
740	547600	405224000	27,2029	9,0450	2,86923	1,35135	2324,8	430084	**740**
741	549081	406869021	27,2213	9,0491	2,86982	1,34953	2327,9	431247	741
742	550564	408518488	27,2397	9,0532	2,87040	1,34771	2331,1	432412	742
743	552049	410172407	27,2580	9,0572	2,87099	1,34590	2334,2	433578	743
744	553536	411830784	27,2764	9,0613	2,87157	1,34409	2337,3	434746	744
745	555025	413493625	27,2947	9,0654	2,87216	1,34228	2340,5	435916	745
746	556516	415160936	27,3130	9,0694	2,87274	1,34048	2343,6	437087	746
747	558009	416832723	27,3313	9,0735	2,87332	1,33869	2346,8	438259	747
748	559504	418508992	27,3496	9,0775	2,87390	1,33690	2349,9	439433	748
749	561001	420189749	27,3679	9,0816	2,87448	1,33511	2353,1	440609	749
750	562500	421875000	27,3861	9,0856	2,87506	1,33333	2356,2	441786	**750**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
750	562500	421875000	27,3861	9,0856	2,87506	1,33333	2356,2	441786	**750**
751	564001	423564751	27,4044	9,0896	2,87564	1,33156	2359,3	442965	751
752	565504	425259008	27,4226	9,0937	2,87622	1,32979	2362,5	444146	752
753	567009	426957777	27,4408	9,0977	2,87679	1,32802	2365,6	445328	753
754	568516	428661064	27,4591	9,1017	2,87737	1,32626	2368,8	446511	754
755	570025	430368875	27,4773	9,1057	2,87795	1,32450	2371,9	447697	755
756	571536	432081216	27,4955	9,1098	2,87852	1,32275	2375,0	448883	756
757	573049	433798093	27,5136	9,1138	2,87910	1,32100	2378,2	450072	757
758	574564	435519512	27,5318	9,1178	2,87967	1,31926	2381,3	451262	758
759	576081	437245479	27,5500	9,1218	2,88024	1,31752	2384,5	452453	759
760	577600	438976000	27,5681	9,1258	2,88081	1,31579	2387,6	453646	**760**
761	579121	440711081	27,5862	9,1298	2,88138	1,31406	2390,8	454841	761
762	580644	442450728	27,6043	9,1338	2,88195	1,31234	2393,9	456037	762
763	582169	444194947	27,6225	9,1378	2,88252	1,31062	2397,0	457234	763
764	583696	445943744	27,6405	9,1418	2,88309	1,30890	2400,2	458434	764
765	585225	447697125	27,6586	9,1458	2,88366	1,30719	2403,3	459635	765
766	586756	449455096	27,6767	9,1498	2,88423	1,30548	2406,5	460837	766
767	588289	451217663	27,6948	9,1537	2,88480	1,30378	2409,6	462041	767
768	589824	452984832	27,7128	9,1577	2,88536	1,30208	2412,7	463247	768
769	591361	454756609	27,7308	9,1617	2,88593	1,30039	2415,9	464454	769
770	592900	456533000	27,7489	9,1657	2,88649	1,29870	2419,0	465663	**770**
771	594441	458314011	27,7669	9,1696	2,88705	1,29702	2422,2	466873	771
772	595984	460099648	27,7849	9,1736	2,88762	1,29534	2425,3	468085	772
773	597529	461889917	27,8029	9,1775	2,88818	1,29366	2428,5	469298	773
774	599076	463684824	27,8209	9,1815	2,88874	1,29199	2431,6	470513	774
775	600625	465484375	27,8388	9,1855	2,88930	1,29032	2434,7	471730	775
776	602176	467288576	27,8568	9,1894	2,88986	1,28866	2437,9	472948	776
777	603729	469097433	27,8747	9,1933	2,89042	1,28700	2441,0	474168	777
778	605284	470910952	27,8927	9,1973	2,89098	1,28535	2444,2	475389	778
779	606841	472729139	27,9106	9,2012	2,89154	1,28370	2447,3	476612	779
780	608400	474552000	27,9285	9,2052	2,89209	1,28205	2450,4	477836	**780**
781	609961	476379541	27,9464	9,2091	2,89265	1,28041	2453,6	479062	781
782	611524	478211768	27,9643	9,2130	2,89321	1,27877	2456,7	480290	782
783	613089	480048687	27,9821	9,2170	2,89376	1,27714	2459,9	481519	783
784	614656	481890304	28,0000	9,2209	2,89432	1,27551	2463,0	482750	784
785	616225	483736625	28,0179	9,2248	2,89487	1,27389	2466,2	483982	785
786	617796	485587656	28,0357	9,2287	2,89542	1,27226	2469,3	485216	786
787	619369	487443403	28,0535	9,2326	2,89597	1,27065	2472,4	486451	787
788	620944	489303872	28,0713	9,2365	2,89653	1,26904	2475,6	487688	788
789	622521	491169069	28,0891	9,2404	2,89708	1,26743	2478,7	488927	789
790	624100	493039000	28,1069	9,2443	2,89763	1,26582	2481,9	490167	**790**
791	625681	494913671	28,1247	9,2482	2,89818	1,26422	2485,0	491409	791
792	627264	496793088	28,1425	9,2521	2,89873	1,26263	2488,1	492652	792
793	628849	498677257	28,1603	9,2560	2,89927	1,26103	2491,3	493897	793
794	630436	500566184	28,1780	9,2599	2,89982	1,25945	2494,4	495143	794
795	632025	502459875	28,1957	9,2638	2,90037	1,25786	2497,6	496391	795
796	633616	504358336	28,2135	9,2677	2,90091	1,25628	2500,7	497641	796
797	635209	506261573	28,2312	9,2716	2,90146	1,25471	2503,8	498892	797
798	636804	508169592	28,2489	9,2754	2,90200	1,25313	2507,0	500145	798
799	638401	510082399	28,2666	9,2793	2,90255	1,25156	2510,1	501399	799
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	2,90309	1,25000	2513,3	502655	**800**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000\cdot\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	2,90309	1,25000	2513,3	502655	**800**
801	641601	513922401	28,3019	9,2870	2,90363	1,24844	2516,4	503912	801
802	643204	515849608	28,3196	9,2909	2,90417	1,24688	2519,6	505171	802
803	644809	517781627	28,3373	9,2948	2,90472	1,24533	2522,7	506432	803
804	646416	519718464	28,3549	9,2986	2,90526	1,24378	2525,8	507694	804
805	648025	521660125	28,3725	9,3025	2,90580	1,24224	2529,0	508958	805
806	649636	523606616	28,3901	9,3063	2,90634	1,24069	2532,1	510223	806
807	651249	525557943	28,4077	9,3102	2,90687	1,23916	2535,3	511490	807
808	652864	527514112	28,4253	9,3140	2,90741	1,23762	2538,4	512758	808
809	654481	529475129	28,4429	9,3179	2,90795	1,23609	2541,5	514028	809
810	656100	531441000	28,4605	9,3217	2,90849	1,23457	2544,7	515300	**810**
811	657721	533411731	28,4781	9,3255	2,90902	1,23305	2547,8	516573	811
812	659344	535387328	28,4956	9,3294	2,90956	1,23153	2551,0	517848	812
813	660969	537367797	28,5132	9,3332	2,91009	1,23001	2554,1	519124	813
814	662596	539353144	28,5307	9,3370	2,91062	1,22850	2557,3	520402	814
815	664225	541343375	28,5482	9,3408	2,91116	1,22699	2560,4	521681	815
816	665856	543338496	28,5657	9,3447	2,91169	1,22549	2563,5	522962	816
817	667489	545338513	28,5832	9,3485	2,91222	1,22399	2566,7	524245	817
818	669124	547343432	28,6007	9,3523	2,91275	1,22249	2569,8	525529	818
819	670761	549353259	28,6182	9,3561	2,91328	1,22100	2573,0	526814	819
820	672400	551368000	28,6356	9,3599	2,91381	1,21951	2576,1	528102	**820**
821	674041	553387661	28,6531	9,3637	2,91434	1,21803	2579,2	529391	821
822	675684	555412248	28,6705	9,3675	2,91487	1,21655	2582,4	530681	822
823	677329	557441767	28,6880	9,3713	2,91540	1,21507	2585,5	531973	823
824	678976	559476224	28,7054	9,3751	2,91593	1,21359	2588,7	533267	824
825	680625	561515625	28,7228	9,3789	2,91645	1,21212	2591,8	534562	825
826	682276	563559976	28,7402	9,3827	2,91698	1,21065	2595,0	535858	826
827	683929	565609283	28,7576	9,3865	2,91751	1,20919	2598,1	537157	827
828	685584	567663552	28,7750	9,3902	2,91803	1,20773	2601,2	538456	828
829	687241	569722789	28,7924	9,3940	2,91855	1,20627	2604,4	539758	829
830	688900	571787000	28,8097	9,3978	2,91908	1,20482	2607,5	541061	**830**
831	690561	573856191	28,8271	9,4016	2,91960	1,20337	2610,7	542365	831
832	692224	575930368	28,8444	9,4053	2,92012	1,20192	2613,8	543671	832
833	693889	578009537	28,8617	9,4091	2,92065	1,20048	2616,9	544979	833
834	695556	580093704	28,8791	9,4129	2,92117	1,19904	2620,1	546288	834
835	697225	582182875	28,8964	9,4166	2,92169	1,19760	2623,2	547599	835
836	698896	584277056	28,9137	9,4204	2,92221	1,19617	2626,4	548912	836
837	700569	586376253	28,9310	9,4241	2,92273	1,19474	2629,5	550226	837
838	702244	588480472	28,9482	9,4279	2,92324	1,19332	2632,7	551541	838
839	703921	590589719	28,9655	9,4316	2,92376	1,19190	2635,8	552858	839
840	705600	592704000	28,9828	9,4354	2,92428	1,19048	2638,9	554177	**840**
841	707281	594823321	29,0000	9,4391	2,92480	1,18906	2642,1	555497	841
842	708964	596947688	29,0172	9,4429	2,92531	1,18765	2645,2	556819	842
843	710649	599077107	29,0345	9,4466	2,92583	1,18624	2648,4	558142	843
844	712336	601211584	29,0517	9,4503	2,92634	1,18483	2651,5	559467	844
845	714025	603351125	29,0689	9,4541	2,92686	1,18343	2654,6	560794	845
846	715716	605495736	29,0861	9,4578	2,92737	1,18203	2657,8	562122	846
847	717409	607645423	29,1033	9,4615	2,92788	1,18064	2660,9	563452	847
848	719104	609800192	29,1204	9,4652	2,92840	1,17925	2664,1	564783	848
849	720801	611960049	29,1376	9,4690	2,92891	1,17786	2667,2	566116	849
850	722500	614125000	29,1548	9,4727	2,92942	1,17647	2670,4	567450	**850**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
850	722500	614125000	29,1548	9,4727	2,92942	1,17647	2670,4	567450	**850**
851	724201	616295051	29,1719	9,4764	2,92993	1,17509	2673,5	568786	851
852	725904	618470208	29,1890	9,4801	2,93044	1,17371	2676,6	570124	852
853	727609	620650477	29,2062	9,4838	2,93095	1,17233	2679,8	571463	853
854	729316	622835864	29,2233	9,4875	2,93146	1,17096	2682,9	572803	854
855	731025	625026375	29,2404	9,4912	2,93197	1,16959	2686,1	574146	855
856	732736	627222016	29,2575	9,4949	2,93247	1,16822	2689,2	575490	856
857	734449	629422793	29,2746	9,4986	2,93298	1,16686	2692,3	576835	857
858	736164	631628712	29,2916	9,5023	2,93349	1,16550	2695,5	578182	858
859	737881	633839779	29,3087	9,5060	2,93399	1,16414	2698,6	579530	859
860	739600	636056000	29,3258	9,5097	2,93450	1,16279	2701,8	580880	**860**
861	741321	638277381	29,3428	9,5134	2,93500	1,16144	2704,9	582232	861
862	743044	640503928	29,3598	9,5171	2,93551	1,16009	2708,1	583585	862
863	744769	642735647	29,3769	9,5207	2,93601	1,15875	2711,2	584940	863
864	746496	644972544	29,3939	9,5244	2,93651	1,15741	2714,3	586297	864
865	748225	647214625	29,4109	9,5281	2,93702	1,15607	2717,5	587655	865
866	749956	649461896	29,4279	9,5317	2,93752	1,15473	2720,6	589014	866
867	751689	651714363	29,4449	9,5354	2,93802	1,15340	2723,8	590375	867
868	753424	653972032	29,4618	9,5391	2,93852	1,15207	2726,9	591738	868
869	755161	656234909	29,4788	9,5427	2,93902	1,15075	2730,0	593102	869
870	756900	658503000	29,4958	9,5464	2,93952	1,14943	2733,2	594468	**870**
871	758641	660776311	29,5127	9,5501	2,94002	1,14811	2736,3	595835	871
872	760384	663054848	29,5296	9,5537	2,94052	1,14679	2739,5	597204	872
873	762129	665338617	29,5466	9,5574	2,94101	1,14548	2742,6	598575	873
874	763876	667627624	29,5635	9,5610	2,94151	1,14416	2745,8	599947	874
875	765625	669921875	29,5804	9,5647	2,94201	1,14286	2748,9	601320	875
876	767376	672221376	29,5973	9,5683	2,94250	1,14155	2752,0	602696	876
877	769129	674526133	29,6142	9,5719	2,94300	1,14025	2755,2	604073	877
878	770884	676836152	29,6311	9,5756	2,94349	1,13895	2758,3	605451	878
879	772641	679151439	29,6479	9,5792	2,94399	1,13766	2761,5	606831	879
880	774400	681472000	29,6648	9,5828	2,94448	1,13636	2764,6	608212	**880**
881	776161	683797841	29,6816	9,5865	2,94498	1,13507	2767,7	609595	881
882	777924	686128968	29,6985	9,5901	2,94547	1,13379	2770,9	610980	882
883	779689	688465387	29,7153	9,5937	2,94596	1,13250	2774,0	612366	883
884	781456	690807104	29,7321	9,5973	2,94645	1,13122	2777,2	613754	884
885	783225	693154125	29,7489	9,6010	2,94694	1,12994	2780,3	615143	885
886	784996	695506456	29,7658	9,6046	2,94743	1,12867	2783,5	616534	886
887	786769	697864103	29,7825	9,6082	2,94792	1,12740	2786,6	617927	887
888	788544	700227072	29,7993	9,6118	2,94841	1,12613	2789,7	619321	888
889	790321	702595369	29,8161	9,6154	2,94890	1,12486	2792,9	620717	889
890	792100	704969000	29,8329	9,6190	2,94939	1,12360	2796,0	622114	**890**
891	793881	707347971	29,8496	9,6226	2,94988	1,12233	2799,2	623513	891
892	795664	709732288	29,8664	9,6262	2,95036	1,12108	2802,3	624913	892
893	797449	712121957	29,8831	9,6298	2,95085	1,11982	2805,4	626315	893
894	799236	714516984	29,8998	9,6334	2,95134	1,11857	2808,6	627718	894
895	801025	716917375	29,9166	9,6370	2,95182	1,11732	2811,7	629124	895
896	802816	719323136	29,9333	9,6406	2,95231	1,11607	2814,9	630530	896
897	804609	721734273	29,9500	9,6442	2,95279	1,11483	2818,0	631938	897
898	806404	724150792	29,9666	9,6477	2,95328	1,11359	2821,2	633348	898
899	808201	726572699	29,9833	9,6513	2,95376	1,11235	2824,3	634760	899
900	810000	729000000	30,0000	9,6549	2,95424	1,11111	2827,4	636173	**900**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
900	810000	729000000	30,0000	9,6549	2,95424	1,11111	2827,4	636173	**900**
901	811801	731432701	30,0167	9,6585	2,95472	1,10988	2830,6	637587	901
902	813604	733870808	30,0333	9,6620	2,95521	1,10865	2833,7	639003	902
903	815409	736314327	30,0500	9,6656	2,95569	1,10742	2836,9	640421	903
904	817216	738763264	30,0666	9,6692	2,95617	1,10619	2840,0	641840	904
905	819025	741217625	30,0832	9,6727	2,95665	1,10497	2843,1	643261	905
906	820836	743677416	30,0998	9,6763	2,95713	1,10375	2846,3	644683	906
907	822649	746142643	30,1164	9,6799	2,95761	1,10254	2849,4	646107	907
908	824464	748613312	30,1330	9,6834	2,95809	1,10132	2852,6	647533	908
909	826281	751089429	30,1496	9,6870	2,95856	1,10011	2855,7	648960	909
910	828100	753571000	30,1662	9,6905	2,95904	1,09890	2858,8	650388	**910**
911	829921	756058031	30,1828	9,6941	2,95952	1,09769	2862,0	651818	911
912	831744	758550528	30,1993	9,6976	2,95999	1,09649	2865,1	653250	912
913	833569	761048497	30,2159	9,7012	2,96047	1,09529	2868,3	654684	913
914	835396	763551944	30,2324	9,7047	2,96095	1,09409	2871,4	656118	914
915	837225	766060875	30,2490	9,7082	2,96142	1,09290	2874,6	657555	915
916	839056	768575296	30,2655	9,7118	2,96190	1,09170	2877,7	658993	916
917	840889	771095213	30,2820	9,7153	2,96237	1,09051	2880,8	660433	917
918	842724	773620632	30,2985	9,7188	2,96284	1,08932	2884,0	661874	918
919	844561	776151559	30,3150	9,7224	2,96332	1,08814	2887,1	663317	919
920	846400	778688000	30,3315	9,7259	2,96379	1,08696	2890,3	664761	**920**
921	848241	781229961	30,3480	9,7294	2,96426	1,08578	2893,4	666207	921
922	850084	783777448	30,3645	9,7329	2,96473	1,08460	2896,5	667654	922
923	851929	786330467	30,3809	9,7364	2,96520	1,08342	2899,7	669103	923
924	853776	788889024	30,3974	9,7400	2,96567	1,08225	2902,8	670554	924
925	855625	791453125	30,4138	9,7435	2,96614	1,08108	2906,0	672006	925
926	857476	794022776	30,4302	9,7470	2,96661	1,07991	2909,1	673460	926
927	859329	796597983	30,4467	9,7505	2,96708	1,07875	2912,3	674915	927
928	861184	799178752	30,4631	9,7540	2,96755	1,07759	2915,4	676372	928
929	863041	801765089	30,4795	9,7575	2,96802	1,07643	2918,5	677831	929
930	864900	804357000	30,4959	9,7610	2,96848	1,07527	2921,7	679291	**930**
931	866761	806954491	30,5123	9,7645	2,96895	1,07411	2924,8	680752	931
932	868624	809557568	30,5287	9,7680	2,96942	1,07296	2928,0	682216	932
933	870489	812166237	30,5450	9,7715	2,96988	1,07181	2931,1	683680	933
934	872356	814780504	30,5614	9,7750	2,97035	1,07066	2934,2	685147	934
935	874225	817400375	30,5778	9,7785	2,97081	1,06952	2937,4	686615	935
936	876096	820025856	30,5941	9,7819	2,97128	1,06838	2940,5	688084	936
937	877969	822656953	30,6105	9,7854	2,97174	1,06724	2943,7	689555	937
938	879844	825293672	30,6268	9,7889	2,97220	1,06610	2946,8	691028	938
939	881721	827936019	30,6431	9,7924	2,97267	1,06496	2950,0	692502	939
940	883600	830584000	30,6594	9,7959	2,97313	1,06383	2953,1	693978	**940**
941	885481	833237621	30,6757	9,7993	2,97359	1,06270	2956,2	695455	941
942	887364	835896888	30,6920	9,8028	2,97405	1,06157	2959,4	696934	942
943	889249	838561807	30,7083	9,8063	2,97451	1,06045	2962,5	698415	943
944	891136	841232384	30,7246	9,8097	2,97497	1,05932	2965,7	699897	944
945	893025	843908625	30,7409	9,8132	2,97543	1,05820	2968,8	701380	945
946	894916	846590536	30,7571	9,8167	2,97589	1,05708	2971,9	702865	946
947	896809	849278123	30,7734	9,8201	2,97635	1,05597	2975,1	704352	947
948	898704	851971392	30,7896	9,8236	2,97681	1,05485	2978,2	705840	948
949	900601	854670349	30,8058	9,8270	2,97727	1,05374	2981,4	707330	949
950	902500	857375000	30,8221	9,8305	2,97772	1,05263	2984,5	708822	**950**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
950	902500	857375000	30,8221	9,8305	2,97772	1,05263	2984,5	708822	**950**
951	904401	860085351	30,8383	9,8339	2,97818	1,05152	2987,7	710315	951
952	906304	862801408	30,8545	9,8374	2,97864	1,05042	2990,8	711809	952
953	908209	865523177	30,8707	9,8408	2,97909	1,04932	2993,9	713306	953
954	910116	868250664	30,8869	9,8443	2,97955	1,04822	2997,1	714803	954
955	912025	870983875	30,9031	9,8477	2,98000	1,04712	3000,2	716303	955
956	913936	873722816	30,9192	9,8511	2,98046	1,04603	3003,4	717804	956
957	915849	876467493	30,9354	9,8546	2,98091	1,04493	3006,5	719306	957
958	917764	879217912	30,9516	9,8580	2,98137	1,04384	3009,6	720810	958
959	919681	881974079	30,9677	9,8614	2,98182	1,04275	3012,8	722316	959
960	921600	884736000	30,9839	9,8648	2,98227	1,04167	3015,9	723823	**960**
961	923521	887503681	31,0000	9,8683	2,98272	1,04058	3019,1	725332	961
962	925444	890277128	31,0161	9,8717	2,98318	1,03950	3022,2	726842	962
963	927369	893056347	31,0322	9,8751	2,98363	1,03842	3025,4	728354	963
964	929296	895841344	31,0483	9,8785	2,98408	1,03734	3028,5	729867	964
965	931225	898632125	31,0644	9,8819	2,98453	1,03627	3031,6	731382	965
966	933156	901428696	31,0805	9,8854	2,98498	1,03520	3034,8	732899	966
967	935089	904231063	31,0966	9,8888	2,98543	1,03413	3037,9	734417	967
968	937024	907039232	31,1127	9,8922	2,98588	1,03306	3041,1	735937	968
969	938961	909853209	31,1288	9,8956	2,98632	1,03199	3044,2	737458	969
970	940900	912673000	31,1448	9,8990	2,98677	1,03093	3047,3	738981	**970**
971	942841	915498611	31,1609	9,9024	2,98722	1,02987	3050,5	740506	971
972	944784	918330048	31,1769	9,9058	2,98767	1,02881	3053,6	742032	972
973	946729	921167317	31,1929	9,9092	2,98811	1,02775	3056,8	743559	973
974	948676	924010424	31,2090	9,9126	2,98856	1,02669	3059,9	745088	974
975	950625	926859375	31,2250	9,9160	2,98900	1,02564	3063,1	746619	975
976	952576	929714176	31,2410	9,9194	2,98945	1,02459	3066,2	748151	976
977	954529	932574833	31,2570	9,9227	2,98989	1,02354	3069,3	749685	977
978	956484	935441352	31,2730	9,9261	2,99034	1,02249	3072,5	751221	978
979	958441	938313739	31,2890	9,9295	2,99078	1,02145	3075,6	752758	979
980	960400	941192000	31,3050	9,9329	2,99123	1,02041	3078,8	754296	**980**
981	962361	944076141	31,3209	9,9363	2,99167	1,01937	3081,9	755837	981
982	964324	946966168	31,3369	9,9396	2,99211	1,01833	3085,0	757378	982
983	966289	949862087	31,3528	9,9430	2,99255	1,01729	3088,2	758922	983
984	968256	952763904	31,3688	9,9464	2,99300	1,01626	3091,3	760466	984
985	970225	955671625	31,3847	9,9497	2,99344	1,01523	3094,5	762013	985
986	972196	958585256	31,4006	9,9531	2,99388	1,01420	3097,6	763561	986
987	974169	961504803	31,4166	9,9565	2,99432	1,01317	3100,8	765111	987
988	976144	964430272	31,4325	9,9598	2,99476	1,01215	3103,9	766662	988
989	978121	967361669	31,4484	9,9632	2,99520	1,01112	3107,0	768214	989
990	980100	970299000	31,4643	9,9666	2,99564	1,01010	3110,2	769769	**990**
991	982081	973242271	31,4802	9,9699	2,99607	1,00908	3113,3	771325	991
992	984064	976191488	31,4960	9,9733	2,99651	1,00806	3116,5	772882	992
993	986049	979146657	31,5119	9,9766	2,99695	1,00705	3119,6	774441	993
994	988036	982107784	31,5278	9,9800	2,99739	1,00604	3122,7	776002	994
995	990025	985074875	31,5436	9,9833	2,99782	1,00503	3125,9	777564	995
996	992016	988047936	31,5595	9,9866	2,99826	1,00402	3129,0	779128	996
997	994009	991026973	31,5753	9,9900	2,99870	1,00301	3132,2	780693	997
998	996004	994011992	31,5911	9,9933	2,99913	1,00200	3135,3	782260	998
999	998001	997002999	31,6070	9,9967	2,99957	1,00100	3138,5	783828	999

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	— ∞	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972
10	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
20	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673
30	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
40	3,6889	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918
50	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775
60	4,0943	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589	4,1744	4,1897	4,2047	4,2195	4,2341
70	4,2485	4,2627	4,2767	4,2905	4,3041	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3694
80	4,3820	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886
90	4,4998	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951
100	4,6052	4,6151	4,6250	4,6347	4,6444	4,6540	4,6634	4,6728	4,6821	4,6913
110	4,7005	4,7095	4,7185	4,7274	4,7362	4,7449	4,7536	4,7622	4,7707	4,7791
120	4,7875	4,7958	4,8040	4,8122	4,8203	4,8283	4,8363	4,8442	4,8520	4,8598
130	4,8675	4,8752	4,8828	4,8903	4,8978	4,9053	4,9127	4,9200	4,9273	4,9345
140	4,9416	4,9488	4,9558	4,9628	4,9698	4,9767	4,9836	4,9904	4,9972	5,0039
150	5,0106	5,0173	5,0239	5,0304	5,0370	5,0434	5,0499	5,0562	5,0626	5,0689
160	5,0752	5,0814	5,0876	5,0938	5,0999	5,1059	5.1120	5,1180	5,1240	5,1299
170	5,1358	5,1417	5,1475	5,1533	5,1591	5,1648	5,1705	5,1761	5,1818	5,1874
180	5,1930	5,1985	5,2040	5,2095	5,2149	5,2204	5,2257	5,2311	5,2364	5,2417
190	5,2470	5,2523	5,2575	5,2627	5,2679	5,2730	5,2781	5,2832	5,2883	5,2933
200	5,2983	5,3033	5,3083	5,3132	5,3181	5,3230	5,3279	5,3327	5,3375	5,3423
210	5,3471	5,3519	5,3566	5,3613	5,3660	5,3706	5,3753	5,3799	5,3845	5,3891
220	5,3936	5,3982	5,4027	5,4072	5,4116	5,4161	5,4205	5,4250	5,4293	5,4337
230	5,4381	5,4424	5,4467	5,4510	5,4553	5,4596	5,4638	5,4681	5,4723	5,4765
240	5,4806	5,4848	5,4889	5,4931	5,4972	5,5013	5,5053	5,5094	5,5134	5,5175
250	5,5215	5,5255	5,5294	5,5334	5,5373	5,5413	5,5452	5,5491	5,5530	5,5568
260	5,5607	5,5645	5,5683	5,5722	5,5759	5,5797	5,5835	5,5872	5,5910	5,5947
270	5,5984	5,6021	5,6058	5,6095	5,6131	5,6168	5,6204	5,6240	5,6276	5,6312
280	5,6348	5,6384	5,6419	5,6454	5,6490	5,6525	5,6560	5,6595	5,6630	5,6664
290	5,6699	5,6733	5,6768	5,6802	5,6836	5,6870	5,6904	5,6937	5,6971	5,7004
300	5,7038	5,7071	5,7104	5,7137	5,7170	5,7203	5,7236	5,7268	5,7301	5,7333
310	5,7366	5,7398	5,7430	5,7462	5,7494	5,7526	5,7557	5,7589	5,7621	5,7652
320	5,7683	5,7714	5,7746	5,7777	5,7807	5,7838	5,7869	5,7900	5,7930	5,7961
330	5,7991	5,8021	5,8051	5,8081	5,8111	5,8141	5,8171	5,8201	5,8230	5,8260
340	5,8289	5,8319	5,8348	5,8377	5,8406	5,8435	5,8464	5,8493	5,8522	5,8551
350	5,8579	5,8608	5,8636	5,8665	5,8693	5,8721	5,8749	5,8777	5,8805	5,8833
360	5,8861	5,8889	5,8916	5,8944	5,8972	5,8999	5,9026	5,9054	5,9081	5,9011
370	5,9135	5,9162	5,9189	5,9216	5,9243	5,9269	5,9296	5,9322	5,9349	5,9375
380	5,9402	5,9428	5,9454	5,9480	5,9506	5,9532	5,9558	5,9584	5,9610	5,9636
390	5,9661	5,9687	5,9713	5,9738	5,9764	5,9789	5,9814	5,9839	5.9865	5,9890
400	5,9915	5,9940	5,9965	5,9989	6,0014	6,0039	6,0064	6,0088	6,0113	6,0137
410	6,0162	6,0186	6,0210	6,0234	6,0259	6,0283	6,0307	6,0331	6,0355	6,0379
420	6,0403	6,0426	6,0450	6,0474	6,0497	6,0521	6,0544	6,0568	6,0591	6,0615
430	6,0638	6,0661	6,0684	6,0707	6,0730	6,0753	6,0776	6,0799	6,0822	6,0845
440	6,0868	6,0890	6,0913	6,0936	6,0958	6,0981	6,1003	6,1026	6,1048	6,1070
450	6,1092	6,1115	6,1137	6,1159	6,1181	6,1203	6,1225	6,1247	6,1269	6,1291
460	6,1312	6,1334	6,1356	6,1377	6,1399	6,1420	6,1442	6,1463	6,1485	6,1506
470	6,1527	6,1549	6,1570	6,1591	6,1612	6,1633	6,1654	6,1675	6,1696	6,1717
480	6,1738	6,1759	6,1779	6,1800	6,1821	6,1841	6,1862	6,1883	6,1903	6,1924
490	6,1944	6,1964	6,1985	6,2005	6,2025	6,2046	6,2066	6,2086	6,2106	6,2126

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	6,2146	6,2166	6,2186	6,2206	6,2226	6,2246	6,2265	6,2285	6,2305	6,2324
510	6,2344	6,2364	6,2383	6,2403	6,2422	6,2442	6,2461	6,2480	6,2500	6,2519
520	6,2538	6,2558	6,2577	6,2596	6,2615	6,2634	6,2653	6,2672	6,2691	6,2710
530	6,2729	6,2748	6,2766	6,2785	6,2804	6,2823	6,2841	6,2860	6,2879	6,2897
540	6,2916	6,2934	6,2953	6,2971	6,2989	6,3008	6,3026	6,3044	6,3063	6,3081
550	6,3099	6,3117	6,3135	6,3154	6,3172	6,3190	6,3208	6,3226	6,3244	6,3261
560	6,3279	6,3297	6,3315	6,3333	6,3351	6,3368	6,3386	6,3404	6,3421	6,3439
570	6,3456	6,3474	6,3491	6,3509	6,3526	6,3544	6,3561	6,3578	6,3596	6,3613
580	6,3630	6,3648	6,3665	6,3682	6,3699	6,3716	6,3733	6,3750	6,3767	6,3784
590	6,3801	6,3818	6,3835	6,3852	6,3869	6,3886	6,3902	6,3919	6,3936	6,3953
600	6,3969	6,3986	6,4003	6,4019	6,4036	6,4052	6,4069	6,4085	6,4102	6,4118
610	6,4135	6,4151	6,4167	6,4184	6,4200	6,4216	6,4232	6,4249	6,4265	6,4281
620	6,4297	6,4313	6,4329	6,4345	6,4362	6,4378	6,4394	6,4409	6,4425	6,4441
630	6,4457	6,4473	6,4489	6,4505	6,4520	6,4536	6,4552	6,4568	6,4583	6,4599
640	6,4615	6,4630	6,4646	6,4661	6,4677	6,4693	6,4708	6,4723	6,4739	6,4754
650	6,4770	6,4785	6,4800	6,4816	6,4831	6,4846	6,4862	6,4877	6,4892	6,4907
660	6,4922	6,4938	6,4953	6,4968	6,4983	6,4998	6,5013	6,5028	6,5043	6,5058
670	6,5073	6,5088	6,5103	6,5117	6,5132	6,5147	6,5162	6,5177	6,5191	6,5206
680	6,5221	6,5236	6,5250	6,5265	6,5280	6,5294	6,5309	6,5323	6,5338	6,5352
690	6,5367	6,5381	6,5396	6,5410	6,5425	6,5439	6,5453	6,5468	6,5482	6,5497
700	6,5511	6,5525	6,5539	6,5554	6,5568	6,5582	6,5596	6,5610	6,5624	6,5639
710	6,5653	6,5667	6,5681	6,5695	6,5709	6,5723	6,5737	6,5751	6,5765	6,5779
720	6,5793	6,5806	6,5820	6,5834	6,5848	6,5862	6,5876	6,5889	6,5903	6,5917
730	6,5930	6,5944	6,5958	6,5971	6,5985	6,5999	6,6012	6,6026	6,6039	6,6053
740	6,6067	6,6080	6,6093	6,6107	6,6120	6,6134	6,6147	6,6161	6,6174	6,6187
750	6,6201	6,6214	6,6227	6,6241	6,6254	6,6267	6,6280	6,6294	6,6307	6,6320
760	6,6333	6,6346	6,6359	6,6373	6,6386	6,6399	6,6412	6,6425	6,6438	6,6451
770	6,6464	6,6477	6,6490	6,6503	6,6516	6,6529	6,6542	6,6554	6,6567	6,6580
780	6,6593	6,6606	6,6619	6,6631	6,6644	6,6657	6,6670	6,6682	6,6695	6,6708
790	6,6720	6,6733	6,6746	6,6758	6,6771	6,6783	6,6796	6,6809	6,6821	6,6834
800	6,6846	6,6859	6,6871	6,6884	6,6896	6,6908	6,6921	6,6933	6,6946	6,6958
810	6,6970	6,6983	6,6995	6,7007	6,7020	6,7032	6,7044	6,7056	6,7069	6,7081
820	6,7093	6,7105	6,7117	6,7130	6,7142	6,7154	6,7166	6,7178	6,7190	6,7202
830	6,7214	6,7226	6,7238	6,7250	6,7262	6,7274	6,7286	6,7298	6,7310	6,7322
840	6,7334	6,7346	6,7358	6,7370	6,7382	6,7393	6,7405	6,7417	6,7429	6,7441
850	6,7452	6,7464	6,7476	6,7488	6,7499	6,7511	6,7523	6,7534	6,7546	6,7558
860	6,7569	6,7581	6,7593	6,7604	6,7616	6,7627	6,7639	6,7650	6,7662	6,7673
870	6,7685	6,7696	6,7708	6,7719	6,7731	6,7742	6,7754	6,7765	6,7776	6,7788
880	6,7799	6,7811	6,7822	6,7833	6,7845	6,7856	6,7867	6,7878	6,7890	6,7901
890	6,7912	6,7923	6,7935	6,7946	6,7957	6,7968	6,7979	6,7991	6,8002	6,8013
900	6,8024	6,8035	6,8046	6,8057	6,8068	6,8079	6,8090	6,8101	6,8112	6,8123
910	6,8134	6,8145	6,8156	6,8167	6,8178	6,8189	6,8200	6,8211	6,8222	6,8233
920	6,8244	6,8255	6,8265	6,8276	6,8287	6,8298	6,8309	6,8320	6,8330	6,8341
930	6,8352	6,8363	6,8373	6,8384	6,8395	6,8405	6,8416	6,8427	6,8437	6,8448
940	6,8459	6,8469	6,8480	6,8491	6,8501	6,8512	6,8522	6,8533	6,8544	6,8554
950	6,8565	6,8575	6,8586	6,8596	6,8607	6,8617	6,8628	6,8638	6,8648	6,8659
960	6,8669	6,8680	6,8690	6,8701	6,8711	6,8721	6,8732	6,8742	6,8752	6,8763
970	6,8773	6,8783	6,8794	6,8804	6,8814	6,8824	6,8835	6,8845	6,8855	6,8865
980	6,8876	6,8886	6,8896	6,8906	6,8916	6,8926	6,8937	6,8947	6,8957	6,8967
990	6.8977	6,8987	6,8997	6,9007	6,9017	6,9027	6,9037	6,9047	6,9057	6,9068

Grad	Sinus							
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	**80**
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	**70**
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	**60**
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	**50**
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Grad
	Kosinus							

Funktionen.

Grad	Kosinus							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	**80**
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0.95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	**70**
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	**60**
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	**50**
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Sinus							

Grad	Tangens							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	**80**
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	**70**
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51320	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	**60**
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	**50**
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Kotangens							

Funktionen.

Grad	Kotangens							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	**80**
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	**70**
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	**60**
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	**50**
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Tangens							

D. Bogenlängen, Bogenhöhen, Sehnenlängen

Zentriwinkel in Grad	Bogenlänge	Bogenhöhe	Sehnenlänge	Inhalt des Kreisabschn.	Zentriwinkel in Grad	Bogenlänge	Bogenhöhe	Sehnenlänge	Inhalt des Kreisabschn.
1	0,0175	0,0000	0,0175	0,00000	46	0,8029	0,0795	0,7815	0,04176
2	0,0349	0,0002	0,0349	0,00000	47	0,8203	0,0829	0,7975	0,04448
3	0,0524	0,0003	0,0524	0,00001	48	0,8378	0,0865	0,8135	0,04731
4	0,0698	0,0006	0,0698	0,00003	49	0,8552	0,0900	0,8294	0,05025
5	0,0873	0,0010	0,0872	0,00006	**50**	0,8727	0,0937	0,8452	0,05331
6	0,1047	0,0014	0,1047	0,00010	51	0,8901	0,0974	0,8610	0,05649
7	0,1222	0,0019	0,1221	0,00015	52	0,9076	0,1012	0,8767	0,05978
8	0,1396	0,0024	0,1395	0,00023	53	0,9250	0,1051	0,8924	0,06319
9	0,1571	0,0031	0,1569	0,00032	54	0,9425	0,1090	0,9080	0,06673
10	0,1745	0,0038	0,1743	0,00044	55	0,9599	0,1130	0,9235	0,07039
11	0,1920	0,0046	0,1917	0,00059	56	0,9774	0,1171	0,9389	0,07417
12	0,2094	0,0055	0,2091	0,00076	57	0,9948	0,1212	0,9543	0,07808
13	0,2269	0,0064	0,2264	0,00097	58	1,0123	0,1254	0,9696	0,08212
14	0,2443	0,0075	0,2437	0,00121	59	1,0297	0,1296	0,9848	0,08629
15	0,2618	0,0086	0,2611	0,00149	**60**	1,0472	0,1340	1,0000	0,09059
16	0,2793	0,0097	0,2783	0,00181	61	1,0647	0,1384	1,0151	0,09502
17	0,2967	0,0110	0,2956	0,00217	62	1,0821	0,1428	1,0301	0,09958
18	0,3142	0,0123	0,3129	0,00257	63	1,0996	0,1474	1,0450	0,10428
19	0,3316	0,0137	0,3301	0,00302	64	1,1170	0,1520	1,0598	0,10911
20	0,3491	0,0152	0,3473	0,00352	65	1,1345	0,1566	1,0746	0,11408
21	0,3665	0,0167	0,3645	0,00408	66	1,1519	0,1613	1,0893	0,11919
22	0,3840	0,0184	0,3816	0,00468	67	1,1694	0,1661	1,1039	0,12443
23	0,4014	0,0201	0,3987	0,00535	68	1,1868	0,1710	1,1184	0,12982
24	0,4189	0,0219	0,4158	0,00607	69	1,2043	0,1759	1,1328	0,13535
25	0,4363	0,0237	0,4329	0,00686	**70**	1,2217	0,1808	1,1472	0,14102
26	0,4538	0,0256	0,4499	0,00771	71	1,2392	0,1859	1,1614	0,14683
27	0,4712	0,0276	0,4669	0,00862	72	1,2566	0,1910	1,1756	0,15279
28	0,4887	0,0297	0,4838	0,00961	73	1,2741	0,1961	1,1896	0,15889
29	0,5061	0,0319	0,5008	0,01067	74	1,2915	0,2014	1,2036	0,16514
30	0,5236	0,0341	0,5176	0,01180	75	1,3090	0,2066	1,2175	0,17154
31	0,5411	0,0364	0,5345	0,01301	76	1,3265	0,2120	1,2313	0,17808
32	0,5585	0,0387	0,5512	0,01429	77	1,3439	0,2174	1,2450	0,18477
33	0,5760	0,0412	0,5680	0,01566	78	1,3614	0,2229	1,2586	0,19160
34	0,5934	0,0437	0,5847	0,01711	79	1,3788	0,2284	1,2722	0,19859
35	0,6109	0,0463	0,6014	0,01864	**80**	1,3963	0,2340	1,2856	0,20573
36	0,6283	0,0489	0,6180	0,02027	81	1,4137	0,2396	1,2989	0,21301
37	0,6458	0,0517	0,6346	0,02198	82	1,4312	0,2453	1,3121	0,22045
38	0,6632	0,0545	0,6511	0,02378	83	1,4486	0,2510	1,3252	0,22804
39	0,6807	0,0574	0,6676	0,02568	84	1,4661	0,2569	1,3383	0,23578
40	0,6981	0,0603	0,6840	0,02767	85	1,4835	0,2627	1,3512	0,24367
41	0,7156	0,0633	0,7004	0,02976	86	1,5010	0,2686	1,3640	0,25171
42	0,7330	0,0664	0,7167	0,03195	87	1,5184	0,2746	1,3767	0,25990
43	0,7505	0,0696	0,7330	0,03425	88	1,5359	0,2807	1,3893	0,26825
44	0,7679	0,0728	0,7492	0,03664	89	1,5533	0,2867	1,4018	0,27675
45	0,7854	0,0761	0,7654	0,03915	**90**	1,5708	0,2929	1,4142	0,28540

Ist r der Kreishalbmesser und φ der Zentriwinkel in Grad, also $\text{arc}\,\varphi = \varphi\,\frac{\pi}{180}$, so ergibt sich:

1. die Sehnenlänge: $s = 2\,r \sin\frac{\varphi}{2}$;
2. die Bogenhöhe: $h = r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{s}{2}\,\text{tg}\,\frac{\varphi}{4} = 2\,r \sin^2\frac{\varphi}{4}$;
3. Die Bogenlänge: $l = r\,\text{arc}\,\varphi = 0{,}017453\,r\varphi = \sqrt{s^2 + \frac{16}{3}\,h^2}$ (angenähert);

und Kreisabschnitte für den Radius $r = 1$.

Zentri-winkel in Grad	Bogen-länge	Bogen-höhe	Sehnen-länge	Inhalt des Kreis-abschn.	Zentri-winkel in Grad	Bogen-länge	Bogen-höhe	Sehnen-länge	Inhalt des Kreis-abschn.
91	1,5882	0,2991	1,4265	0,29420	136	2,3736	0,6254	1,8544	0,83949
92	1,6057	0,3053	1,4387	0,30316	137	2,3911	0,6335	1,8608	0,85455
93	1,6232	0,3116	1,4507	0,31226	138	2,4086	0,6416	1,8672	0,86971
94	1,6406	0,3180	1,4627	0,32152	139	2,4260	0,6498	1,8733	0,88497
95	1,6580	0,3244	1,4746	0,33093	**140**	2,4435	0,6580	1,8794	0,90034
96	1,6755	0,3309	1,4863	0,34050	141	2,4609	0,6662	1,8853	0,91580
97	1,6930	0,3374	1,4979	0,35021	142	2,4784	0,6744	1,8910	0,93135
98	1,7104	0,3439	1,5094	0,36008	143	2,4958	0,6827	1,8966	0,94700
99	1,7279	0,3506	1,5208	0,37009	144	2,5133	0,6910	1,9021	0,96274
100	1,7453	0,3572	1,5321	0,38026	145	2,5307	0,6993	1,9074	0,97858
101	1,7628	0,3639	1,5432	0,39058	146	2,5482	0,7076	1,9126	0,99449
102	1,7802	0,3707	1,5543	0,40104	147	2,5656	0,7160	1,9176	1,01050
103	1,7977	0,3775	1,5652	0,41166	148	2,5831	0,7244	1,9225	1,02658
104	1,8151	0,3843	1,5760	0,42242	149	2,6005	0,7328	1,9273	1,04275
105	1,8326	0,3912	1,5867	0,43333	**150**	2,6180	0,7412	1,9319	1,05900
106	1,8500	0,3982	1,5973	0,44439	151	2,6354	0,7496	1,9363	1,07532
107	1,8675	0,4052	1,6077	0,45560	152	2,6529	0,7581	1,9406	1,09171
108	1,8850	0,4122	1,6180	0,46695	153	2,6704	0,7666	1,9447	1,10818
109	1,9024	0,4193	1,6282	0,47844	154	2,6878	0,7750	1,9487	1,12472
110	1,9199	0,4264	1,6383	0,49008	155	2,7053	0,7836	1,9526	1,14132
111	1,9373	0,4336	1,6483	0,50187	156	2,7227	0,7921	1,9563	1,15799
112	1,9548	0,4408	1,6581	0,51379	157	2,7402	0,8006	1,9598	1,17472
113	1,9722	0,4481	1,6678	0,52586	158	2,7576	0,8092	1,9633	1,19151
114	1,9897	0,4554	1,6773	0,53807	159	2,7751	0,8178	1,9665	1,20835
115	2,0071	0,4627	1,6868	0,55041	**160**	2,7925	0,8264	1,9696	1,22525
116	2,0246	0,4701	1,6961	0,56289	161	2,8100	0,8350	1,9726	1,24221
117	2,0420	0,4775	1,7053	0,57551	162	2,8274	0,8436	1,9754	1,25921
118	2,0595	0,4850	1,7143	0,58827	163	2,8449	0,8522	1,9780	1,27626
119	2,0769	0,4925	1,7233	0,60116	164	2,8623	0,8608	1,9805	1,29335
120	2,0944	0,5000	1,7321	0,61418	165	2,8798	0,8695	1,9829	1,31049
121	2,1118	0,5076	1,7407	0,62734	166	2,8972	0,8781	1,9851	1,32766
122	2,1293	0,5152	1,7492	0,64063	167	2,9147	0,8868	1,9871	1,34487
123	2,1468	0,5228	1,7576	0,65404	168	2,9322	0,8955	1,9890	1,36212
124	2,1642	0,5305	1,7659	0,66759	169	2,9496	0,9042	1,9908	1,37940
125	2,1817	0,5383	1,7740	0,68125	**170**	2,9671	0,9128	1,9924	1,39671
126	2,1991	0,5460	1,7820	0,69505	171	2,9845	0,9215	1,9938	1,41404
127	2,2166	0,5538	1,7899	0,70897	172	3,0020	0,9302	1,9951	1,43140
128	2,2340	0,5616	1,7976	0,72301	173	3,0194	0,9390	1,9963	1,44878
129	2,2515	0,5695	1,8052	0,73716	174	3,0369	0,9477	1,9973	1,46617
130	2,2689	0,5774	1,8126	0,75144	175	3,0543	0,9564	1,9981	1,48359
131	2,2864	0,5853	1,8199	0,76584	176	3,0718	0,9651	1,9988	1,50101
132	2,3038	0,5933	1,8271	0,78034	177	3,0892	0,9738	1,9993	1,51845
133	2,3213	0,6013	1,8341	0,79497	178	3,1067	0,9825	1,9997	1,53589
134	2,3387	0,6093	1,8410	0,80970	179	3,1241	0,9913	1,9999	1,55334
135	2,3562	0,6173	1,8478	0,82454	**180**	3,1416	1,0000	2,0000	1,57080

4. der Inhalt des Kreisabschnittes $= \frac{r^2}{2}(\text{arc}\,\varphi - \sin\varphi)$;

5. „ „ „ Kreisausschnittes $= \frac{1}{2} r^2 \,\text{arc}\,\varphi = 0{,}00872665\,\varphi\, r^2$;

6. $1 = r$ entspricht $\varphi = 57^0\,17'\,44{,}806'' = 57{,}2957795^0 = 206264{,}806''$;

7. $\text{arc}\,1^0 = \pi : 180 = 0{,}01745329252$; $\quad \log \text{arc}\,1^0 = 0{,}2418773676 - 2$;

8. $\text{arc}\,1' = \pi : 10800 = 0{,}00029088821$; $\quad \log \text{arc}\,1' = 0{,}4637261172 - 4$;

9. $\text{arc}\,1'' = \pi : 648000 = 0{,}00000484814$; $\quad \log \text{arc}\,1'' = 0{,}6855748668 - 6$.

E. Wichtige Zahlenwerte.

π: Ludolphsche Zahl = 3,141 592 653 589 793 ......,
g: Beschleunigung durch die Schwere, angenommen = 9,81 m/Sek.^{2}
e: Grundzahl der natürl. Logarithmen = 2,718 281 828 459 045 2353 ...

Größe	n	log n	1 : n	log (1 : n)
π	3,1415927	0,49715	0,3183099	0,50285—1
2π	6,2831853	0,79818	0,1591549	0,20182—1
3π	9,4247780	0,97427	0,1061033	0,02573—1
4π	12,566371	1,09921	0,0795775	0,90079—2
5π	15,707963	1,19612	0,0636620	0,80388—2
6π	18,849556	1,27530	0,0530516	0,72470—2
7π	21,991149	1,34225	0,0454728	0,65775—2
8π	25,132741	1,40024	0,0397887	0,59976—2
9π	28,274334	1,45139	0,0353678	0,54861—2
$\pi : 2$	1,5707963	0,19612	0,6366198	0,80388—1
$\pi : 3$	1,0471976	0,02003	0,9549297	0,97997—1
$\pi : 4$	0,7853982	0,89509—1	1,2732395	0,10491
$\pi : 5$	0,6283185	0,79818—1	1,5915494	0,20182
$\pi : 6$	0,5235988	0,71900—1	1,9098593	0,28100
$\pi : 7$	0,4487990	0,65205—1	2,2281692	0,34795
$\pi : 8$	0,3926991	0,59406—1	2,5464791	0,40594
$\pi : 9$	0,3490659	0,54291—1	2,8647890	0,45709
$\pi : 12$	0,2617994	0,41797—1	3,8197186	0,58203
$\pi : 16$	0,1963495	0,29303—1	5,0929582	0,70697
$\pi : 32$	0,0981748	0,99200—2	10,185916	1,00800
$\pi : 64$	0,0490874	0,69097—2	20,371833	1,30903
$\pi : 108$	0,0290888	0,46373—2	34,377468	1,53627
$\pi : 180$	0,0174533	0,24188—2	57,295780	1,75812
π^2	9,8696044	0,99430	0,1013212	0,00570—1
π^3	31,006277	1,49145	0,0322515	0,50855—2
π^4	97,409091	1,98860	0,0102660	0,01140—2
π^5	306,01969	2,48575	0,0032678	0,51425—3
π^6	961,38919	2,98290	0,0010402	0,01710—3
$\sqrt{\pi}$	1,7724539	0,24858	0,5641896	0,75143—1
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4645919	0,16572	0,6827841	0,83428—1
$\sqrt[6]{\pi}$	1,2102032	0,08286	0,8263075	0,91714—1
$\pi\sqrt{\pi}$	5,5683280	0,74572	0,1795871	0,25428—1
$\pi\sqrt[3]{\pi}$	4,6011511	0,66287	0,2173352	0,33713—1
$4\pi^2$	39,478418	1,59636	0,0253303	0,40364—2
$\pi^2 : 4$	2,4674011	0,39224	0,4052847	0,60776—1
$\pi\sqrt{2}$	4,4428829	0,64767	0,2250791	0,35234—1
g	9,81	0,99167	0,1019368	0,00833—1
g^2	96,2361	1,98334	0,0103911	0,01666—2
$\sqrt{g}$	3,1320919	0,49583	0,3192754	0,50417—1

Größe	n	log n
$\pi : \sqrt{2}$	2,221441	0,34663
$2\sqrt{\pi}$	3,544908	0,54961
$\sqrt{2\pi}$	2,506628	0,39909
$\sqrt{\pi : 2}$	1,253314	0,09806
$\sqrt{2 : \pi}$	0,797885	0,90194—1
$\sqrt{3 : \pi}$	0,977205	0,98998—1
$\sqrt{90 : \pi}$	5,352372	0,72855
$\sqrt[3]{2\pi}$	1,845261	0,26606
$\sqrt[3]{\pi : 2}$	1,162447	0,06537
$\sqrt[3]{\pi : 4}$	0,922635	0,96503—1
$\sqrt[3]{2 : \pi}$	0,860254	0,93463—1
$\sqrt[3]{3 : \pi}$	0,984745	0,99332—1
$\sqrt[3]{6 : \pi}$	1,240701	0,09367
$\sqrt[3]{\pi^2}$	2,145029	0,33144
$\pi\sqrt[3]{\pi^2}$	6,738808	0,82859
$1 : 2g$	0,050968	0,70730—2
$2\sqrt{g}$	6,264184	0,79686
$\sqrt{2g}$	4,429447	0,64635
$\pi\sqrt{g}$	9,839757	0,99298
$\pi\sqrt{2g}$	13,91536	1,14350
$\pi : \sqrt{g}$	1,003033	0,00132
$\pi : \sqrt{2g}$	0,709252	0,85080—1
$\pi^2 : g$	1,006076	0,00263
e	2,718282	0,43429
e^2	7,389056	0,86859
e^3	20,08554	1,30288
e^4	54,59815	1,73718
$1 : e$	0,367879	0,56571—1
$1 : e^2$	0,135335	0,13141—1
$1 : e^3$	0,049787	0,69712—2
$1 : e^4$	0,018316	0,26282—2
$\sqrt{e}$	1,648721	0,21715
$\sqrt[3]{e}$	1,395611	0,14476

1 Rhein. Fuß = 0,3139 m; 1 m = 3,1862 Rhein. Fuß;
1 Bayr. Fuß = 0,2919 m; 1 m = 3,4263 Bayr. Fuß;
1 Österr. Fuß = 0,3161 m; 1 m = 3,1637 Österr. Fuß;
1 Engl. Fuß = 0,3048 m; 1 m = 3,2809 Engl. Fuß;
1 Par. Fuß = 0,3248 m; 1 m = 3,0784 Par. Fuß.
1 Fuß = 12 Zoll = 144 Linien.

1 Faden engl. = 2 Yards = 6 Fuß = 1,828767 m;
1 Knoten engl. = 1 Seemeile = 1,85315 km.

1 Geogr. Meile = 7,420438854 km;
1 Äquatorgrad = 15 geogr. Meilen.

Große Halbaxe der Erde 6378,2 km;
Kleine Halbaxe der Erde 6356,5 km.

1 Hektar = 100 Ar zu 100 Qu. Meter
= 3,9166 rhein. od. preuß. Morgen (zu 180 Qu. Ruten zu 12^2 Qu. Fuß);
= 2,9349 bayr. Tagwerk (zu 40 Qu. Ruten zu 10^2 Qu. Fuß);
= 1,7377 Wiener Joch (zu 300 Qu. Ruten zu 6^2 Qu. Fuß);
= 2,4711 engl. Acres (zu 160 Qu. Ruten zu $16{,}5^2$ Qu. Fuß).

Oberfläche des Erdsphäroids $509{,}95 \cdot 10^6$ km²;
Volumen des Erdsphäroids $1082{,}84 \cdot 10^9$ km³.

1 Deutsche (metrische) Tonne = 10 Doppelzentner = 20 Zentner = 1000 kg;
1 Englische Tonne = 1016,0475 kg.

1 Grammgewicht unter 45° Breite = 980,6 cm g sec^{-2}.
1 Metrische (neue) Atmosphäre = 1 kg/cm² = 10000 kg/m²;
1 Alte Atmosphäre = 76 cm Quecksilber;

1 Metr. Atm. = 0,96778 alte Atm.; 1 alte Atm. = 1,0333 metr. Atm.

1 Bürg. Jahr = 365 Tage 5 Std. 48,8′;
1 Sterntag = 0,99727 mittl. Tag = 1 mittl. Tag — 3,9317′.

Buchdruckerei Robert Noske, Borna-Leipzig.

